Załóżmy, że badana cecha ma rozkład normalny o wartości średniej μ i odchyleniu standardowym σ, przy czym oba parametry μ i σ są znane.

Niech $X_1, \ldots, X_n$ oznacza próbkę losową. Jeżeli próbka ta pochodzi z rozkładu $N(\mu, \sigma)$, wówczas

$$\overline{X} \sim N(\mu_{\overline{X}}, \sigma_{\overline{X}}) \equiv N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}). \tag{1}$$

Stąd z prawdopodobieństwem $1-\alpha$ średnia $\overline{X}$ będzie sie zawierać w przedziale

$$\begin{aligned} & \left(\mu_{\overline{X}} - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\ ,\ \mu_{\overline{X}} + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma_{\overline{X}}\right) & (2) \\ = & \left(\mu - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \mu + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), & (3) \end{aligned}$$

gdzie $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ jest kwantylem rozkładu standardowego normalnego rzędu $1-\frac{\alpha}{2}$.

Zatem jeżeli znane są parametry procesu μ i σ, wówczas granice powyższego przedziału mogą być użyte jako granice karty kontrolnej do kontroli średniej porcesu, tzn.

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_{\overline{X}} + k\sigma_{\overline{X}} & (4) \\ CL &= \mu_{\overline{X}} & (5) \\ LCL &= \mu_{\overline{X}} - k\sigma_{\overline{X}}, & (6) \end{aligned}$$

a więc

$$\begin{aligned} UCL &= \mu + k\frac{\sigma}{\sqrt{n}} & (7) \\ CL &= \mu & (8) \\ LCL &= \mu - k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, & (9) \end{aligned}$$

gdzie $k = u_{1-\frac{\alpha}{2}}$. W praktyce najczęściej przyjmujemy $k = 3$, co dopowiada przedziałowi na poziomie ufności $0,9973$ (lub testowi na poziomie istotności $0,0027$).

W praktyce μ i σ sa zazwyczaj nieznane i muszą być wyestymowane z procesu w okresie ustabilizowanej produkcji, aby reprezentowały parametry uregulowanego procesu.

Zgodnie z zaleceniami normy ISO 8258 średnią estymujemy ze wzoru

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\overline{X}_1 + \overline{X}_2 + \ldots + \overline{X}_m}{m}. \tag{10}$$

próbka	pomiary				średnia
1	X_{11}	X_{12}	....	X_{1n}	$\overline{X}_1$
2	X_{21}	X_{22}	....	X_{2n}	$\overline{X}_2$
...	...	...	....	...	...
m	X_{m1}	X_{m2}	....	X_{mn}	$\overline{X}_m$

Wielkość $\sigma_{\overline{X}}$ można estymować za pomocą rozstępu R (mówimy wówczas o karcie $\overline{X} - R$) lub też za pomocą odchylenia standardowego z próby S (i wówczas mamy do czynienia z kartą $\overline{X} - S$).

Jeżeli dysponujemy m próbkami $n-$elementowymi, pochodzącymi z obserwowanego procesu, wówczas rozstęp dla procesu estymujemy za pomocą tzw. "średniego rozstępu" (ang. mean of ranges) $\overline{R}$, gdzie

$$\overline{R} = \frac{R_1 + R_2 + \ldots + R_m}{m}. \tag{11}$$

próbka	pomiary				max	min	rozstęp
1	X_{11}	X_{12}	....	X_{1n}	$X_{1,\max}$	$X_{1,\min}$	R_1
2	X_{21}	X_{22}	....	X_{2n}	$X_{2,\max}$	$X_{2,\min}$	R_2
...	...	...	....	...	...	...	...
m	X_{m1}	X_{m2}	....	X_{mn}	$X_{m,\max}$	$X_{m,\min}$	R_m

Można wykazać, że $\widehat{\sigma} = \frac{\overline{R}}{d_2}$, gdzie d_2 jest pewną stałą (zależną od wielkości próbki n). W rezultacie otrzymujemy następującą kartę do kontroli średniej

$$\begin{aligned} UCL &= \overline{\overline{X}} + \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R} && (12) \\ CL &= \overline{\overline{X}} && (13) \\ LCL &= \overline{\overline{X}} - \frac{3}{d_2\sqrt{n}}\overline{R}. && (14) \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu oznaczenia

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}} \qquad (15)$$

otrzymujemy ostateczną postać karty $\overline{X}$

$$\begin{aligned} UCL &= \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} && (16) \\ CL &= \overline{\overline{X}} && (17) \\ LCL &= \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}. && (18) \end{aligned}$$

Wartość średnią procesu należy kontrolować równolegle z rozstępem. W tym wypadku chcemy skonstruować kartę postaci

$$\begin{aligned} UCL &= \mu_R + k\sigma_R && (19) \\ CL &= \mu_R && (20) \\ LCL &= \mu_R - k\sigma_R. && (21) \end{aligned}$$

Ponieważ $\overline{R}$ jest estymatorem μ_R, natomiast $d_3\frac{\overline{R}}{d_2}$, gdzie d_3 jest pewną stałą (zależną od wielkości próbki n), jest estymatorem σ_R, zatem otrzymujemy następującą kartę do kontroli rozstępu

$$\begin{aligned} UCL &= \overline{R} + \frac{3d_3}{d_2}\overline{R} = \left(1 + \frac{3d_3}{d_2}\right)\overline{R} && (22) \\ CL &= \overline{R} && (23) \\ LCL &= \overline{R} - \frac{3d_3}{d_2}\overline{R} = \left(1 - \frac{3d_3}{d_2}\right)\overline{R}. && (24) \end{aligned}$$

Po wprowadzeniu oznaczeń

$$
\begin{aligned}
D_3 &= 1 - \frac{3d_3}{d_2}\overline{R} & (25)\\
D_4 &= 1 + \frac{3d_3}{d_2}\overline{R} & (26)
\end{aligned}
$$

otrzymujemy ostateczną kartę R

$$
\begin{aligned}
UCL &= D_4\overline{R} & (27)\\
CL &= \overline{R} & (28)\\
LCL &= D_3\overline{R}. & (29)
\end{aligned}
$$

Współczynniki D_3 i D_4 dla różnych liczności próbek n są stablicowane.

W przypadku gdy liczność próbek nie jest mała, tzn. dla $n > 10$, rozproszenie procesu należy estymować za pomocą odchylenia standarowego z próby. Prowadzi to do kart $\overline{X} - S$.

Odchylenie standardowe estymujemy za pomocą średniego odchylenia standardowego

$$\overline{S} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_m}{m}. \qquad (30)$$

próbka	pomiary				średnia	odchyl. std.
1	X_{11}	X_{12}	....	X_{1n}	$\overline{X}_1$	S_1
2	X_{21}	X_{22}	....	X_{2n}	$\overline{X}_2$	S_2
...	...	...	....	...	...	...
m	X_{m1}	X_{m2}	....	X_{mn}	$\overline{X}_m$	S_m

Po odpowiednich obliczeniach otrzymujemy następująca kartę do kontroli wartości średniej

$$UCL = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S} \tag{31}$$
$$CL = \overline{\overline{X}} \tag{32}$$
$$LCL = \overline{\overline{X}} - A_3\overline{S} \tag{33}$$

oraz kartę do kontroli odchylenia standardowego

$$UCL = B_4\overline{S} \tag{34}$$
$$CL = \overline{S} \tag{35}$$
$$LCL = B_3\overline{S}, \tag{36}$$

gdzie współczynniki A_3, B_3 i B_4 (dla różnych liczności próbek n) są stablicowane.

Karty $\overline{X} - R$		Karty $\overline{X} - S$	
Karta $\overline{X}$	$\begin{cases} UCL = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} \\ CL = \overline{\overline{X}} \\ LCL = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} \end{cases}$	Karta $\overline{X}$	$\begin{cases} UCL = \overline{\overline{X}} + A_3\overline{S} \\ CL = \overline{\overline{X}} \\ LCL = \overline{\overline{X}} - A_3\overline{S} \end{cases}$
Karta R	$\begin{cases} UCL = D_4\overline{R} \\ CL = \overline{R} \\ LCL = D_3\overline{R} \end{cases}$	Karta S	$\begin{cases} UCL = B_4\overline{S} \\ CL = \overline{S} \\ LCL = B_3\overline{S} \end{cases}$

Karty dla Próbek o Różnej Liczności

Karty $\overline{X} - S$ stosować również wtedy, gdy próbki różnią się licznością.

próbka	pomiary				średnia	odchyl. std.
1	X_{11}	X_{12}	....	X_{1n_1}	$\overline{X}_1$	S_1
2	X_{21}	X_{22}	....	X_{2n_2}	$\overline{X}_2$	S_2
...	...	...	....	...	...	...
m	X_{m1}	X_{m2}	....	X_{mn_m}	$\overline{X}_m$	S_m

Korzysta się wtedy z przedstawionych powyżej wzorów na granice kontrolne i linie centralne, tyle że wielkości $\overline{\overline{X}}$ i $\overline{S}$ wylicza się z następujących wzorów

$$\overline{\overline{X}} = \frac{n_1\overline{X}_1 + n_2\overline{X}_2 + \ldots + n_m\overline{X}_m}{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}, \qquad (37)$$

$$\overline{S} = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + \ldots + (n_m-1)S_m^2}{n_1 + \ldots + n_m - m}}, \qquad (38)$$

gdzie n_i oznacza liczność $i-$tej próbki.

UWAGA

W tym przypadku współczynniki A_3, B_3 i B_4 wyznacza się z tablic oddzielnie dla każdej próbki, w związku z czym granice kontrolne mogą być liniami nieciągłymi.

Alternatywnie, można posłużyć się uśrednioną licznością $\overline{n}$, gdzie

$$\overline{n} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}{m}. \tag{39}$$

Podejście to daje dobre wyniki szczególnie wtedy, gdy liczności poszczególnych próbek nie różnią się zbytnio. Ponieważ średnia z liczności próbek nie musi być liczbą całkowitą, przeto zamiast stosować wzór (39), posługujemy się często modą z liczności, tzn.

$$\overline{n} = Mod(n_1, n_2, \ldots, n_m). \tag{40}$$

Karty Kontrolne Pojedynczych Pomiarów

Do kontroli pojedynczych pomiarów można użyć karty wykorzystujące przesuwające się (ruchome) rozstępy (ang. moving ranges), zdefiniowane jako bezwzględne wartości różnic pomiędzy kolejnymi pomiarami, tzn.

$$MR_i = |X_i - X_{i-1}|, \quad i = 2, 3, \ldots. \tag{41}$$

Nr pomiaru	Pomiar	Ruchomy rozstęp
1	X_1	
2	X_2	$MR_2 = \|X_2 - X_1\|$
...	...	$MR_3 = \|X_3 - X_2\|$
...	...	...
m	X_m	$MR_m = \|X_m - X_{m-1}\|$

Średni ruchomy rozstęp wynosi

$$\overline{MR} = \frac{MR_1 + MR_2 + \ldots + MR_m}{m}. \tag{42}$$

W tym przypadku karta do kontroli pojedynczych pomiarów ma postać

$$\begin{aligned} ULC &= \overline{X} + 3\frac{\overline{MR}}{d_2} && (43)\\ CL &= \overline{X} && (44)\\ LCL &= \overline{X} - 3\frac{\overline{MR}}{d_2}, && (45) \end{aligned}$$

natomiast karta przesuwającego się rozstępu ma postać

$$\begin{aligned} UCL &= D_4\overline{MR} = 3,267\overline{MR} && (46)\\ CL &= \overline{MR} && (47)\\ LCL &= D_3\overline{MR} = 0, && (48) \end{aligned}$$

bo dla $n = 2$ mamy $D_3 = 0$ i $D_4 = 3,267$.

Karta p

Karta **p** – karta frakcji jednostek niezgodnych

(ang. control chart for fraction nonconforming)

Gdyby znana była dopuszczalna frakcja jednostek niezgodnych p kontrolowanego procesu, wówczas odpowiednia karta kontrolna wyglądałaby następująco:

$$\begin{aligned} UCL &= p + 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} && (49)\\ CL &= p && (50)\\ LCL &= p - 3\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}. && (51) \end{aligned}$$

W przypadku, gdy wielkość frakcji p nie jest znana, estymujemy ją na podstawie obserwacji 20 – 30 próbek o tej samej liczności n. Niech m oznacza liczbę próbek, natomiast D_i liczbę jednostek niezgodnych w i−tej próbce. Wówczas frakcja jednostek niezgodnych w i−tej próbce wynosi

$$\widehat{p}_i = \frac{D_i}{n}. \tag{52}$$

Nr próbki	Liczba jedn. niezg.	Frakcja jedn. niezg.
1	D_1	$\widehat{p}_1$
2	D_2	$\widehat{p}_2$
...	...	...
m	D_m	$\widehat{p}_m$

Frakcję jednostek niezgodnych procesu szacujemy ze wzoru

$$\overline{p} = \frac{\widehat{p}_1 + \widehat{p}_2 + \ldots + \widehat{p}_m}{m}. \tag{53}$$

Karta kontrolna frakcji jednostek niezgodnych jest postaci

$$UCL = \overline{p} + 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}} \tag{54}$$

$$CL = \overline{p} \tag{55}$$

$$LCL = \overline{p} - 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n}}. \tag{56}$$

UWAGA

Może się zdarzyć, że wyliczona z powyższego wzoru dolna granica kontronla jest ujemna. Wtedy należy przyjąć

$$LCL = 0. \tag{57}$$

Kartę **p** można stosować również w przypadku, gdy pobierane próbki są różnej liczności. Niech n_i oznacza liczność $i-$tej próbki.

Nr próbki	Liczność próbki	Liczba jedn. niezg.
1	n_1	D_1
2	n_2	D_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
m	n_m	D_m

Wówczas frakcję jednostek niezgodnych kontrolowanego procesu szacuje się ze wzoru

$$\overline{p} = \frac{D_1 + D_2 + \ldots + D_m}{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}. \tag{58}$$

Karta **p** ma wtedy następującą postać

$$UCL = \overline{p} + 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_i}} \tag{59}$$

$$CL = \overline{p} \tag{60}$$

$$LCL = \overline{p} - 3\sqrt{\frac{\overline{p}(1-\overline{p})}{n_i}}. \tag{61}$$

UWAGA

W przypadku próbek o niejednakowej liczności granice kontrolne karty **p** nie są liniami ciągłymi.

Karta np

Czasem zamiast karty **p** stosuje się kartę **np**, czyli kartę liczby jednostek niezgodnych (control chart for the number nonconforming), postaci

$$UCL = np + 3\sqrt{np(1-p)} \quad (62)$$

$$CL = np \quad (63)$$

$$LCL = np - 3\sqrt{np(1-p)}. \quad (64)$$

Gdy frakcja jednostek niezgodnych procesu nie jest znana szacuje się ją za pomocą $\overline{p}$, a karta np wygląda wówczas następująco:

$$UCL = n\overline{p} + 3\sqrt{n\overline{p}(1-\overline{p})} \quad (65)$$

$$CL = n\overline{p} \quad (66)$$

$$LCL = n\overline{p} - 3\sqrt{n\overline{p}(1-\overline{p})}. \quad (67)$$

Karta c

Karta **c** – karta liczby niezgodności (ang. control chart for nonconformities)

Załóżmy, że zliczamy niezgodności z wymaganiami nie mając jednak do czynienia z próbkami o zadanej liczności. Często liczba niezgodności, zaobserwowanych w ustalonym czasie, ma rozkład Poissona

$$P(X = k) = \frac{c^k}{k!}e^{-c}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad (68)$$

gdzie $c > 0$ jest wartością oczekiwaną liczby niezgodności. Ponieważ w rozkładzie Poissona wartość oczekiwana i wariancja są sobie równe, zatem karta liczby niezgodności będzie miała postać

$$UCL = c + 3\sqrt{c} \quad (69)$$

$$CL = c \quad (70)$$

$$LCL = c - 3\sqrt{c}. \quad (71)$$

Jeżeli oczekiwana liczba niezgodności c nie jest znana, wówczas szacuje się ją na podstawie obserwacji 20 – 30 próbek. Niech c_i oznacza liczbę niezgodności w $i-$tej próbce.

Nr próbki	Liczba niezgodności
1	c_1
2	c_2
...	...
m	c_m

Wówczas średnia liczba niezgodności wynosi

$$\overline{c} = \frac{c_1 + c_2 + \ldots + c_m}{m}. \tag{72}$$

W tym przypadku karta **c** ma następującą postać

$$UCL = \overline{c} + 3\sqrt{\overline{c}} \tag{73}$$

$$CL = \overline{c} \tag{74}$$

$$LCL = \overline{c} - 3\sqrt{\overline{c}}. \tag{75}$$

UWAGA

Może się zdarzyć, że wyliczona z powyższego wzoru dolna granica kontronla jest ujemna. Wtedy należy przyjąć

$$LCL = 0. \tag{76}$$

UWAGA

Innym problemem, w którym liczba obserwowanych niezgodności może nie być ograniczona z góry, jest problem liczby niezgodności w próbce o ustalonej liczności, w którym dopuszcza się, że każda jednostka może mieć wiele różnych niezgodności. W tym przypadku również stosuje się kartę **c**, jednakże pod warunkiem, że badane próbki są równoliczne.

Karta u

Karta **u** – karta liczby niezgodności na jednostkę (ang. control chart for nonconformities per unit)

Załóżmy, że rozpatrujemy próbki zawierające po n jednostek. Niech u_i oznacza liczbę niezgodności na jednostkę obliczoną dla $i-$tej próbki

$$u_i = \frac{c_i}{n}. \tag{77}$$

Nr próbki	Liczba niezgodności	Liczba niezg. na jednostkę
1	c_1	u_1
2	c_2	u_2
$\dots$	$\dots$	$\dots$
m	c_m	u_m

Wtedy $\overline{u}$ oznacza średnią liczbę niezgodności na jednostkę oszacowaną na podstawie m próbek pilotażowych, tzn.

$$\overline{u} = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_m}{m}, \tag{78}$$

a karta **u** wygląda następująco

$$UCL = \overline{u} + 3\sqrt{\frac{\overline{u}}{n}} \tag{79}$$

$$CL = \overline{u} \tag{80}$$

$$LCL = \overline{u} - 3\sqrt{\frac{\overline{u}}{n}}. \tag{81}$$

UWAGA

Kartę u można również stosować w przypadku próbek o różnej liczności.

Niech n_i oznacza liczność $i-$tej próbki. Wtedy liczba niezgodności na jednostkę wyraża się wzorem

$$u_i = \frac{c_i}{n_i}, \tag{82}$$

a średnia liczba niezgodności na jednostkę szacowana jest ze wzoru

$$\overline{u} = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_m}{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}. \tag{83}$$

Nr próbki	Liczność próbki	Liczba niezg.	Liczba niezg. na jednostkę
1	n_1	c_1	u_1
2	n_2	c_2	u_2
...	...	...	...
m	n_m	c_m	u_m

W tym przypadku karta **u** wygląda następująco:

$$UCL = \overline{u} + 3\sqrt{\frac{\overline{u}}{n_i}} \tag{84}$$

$$CL = \overline{u} \tag{85}$$

$$LCL = \overline{u} - 3\sqrt{\frac{\overline{u}}{n_i}}. \tag{86}$$

UWAGA

W przypadku próbek o niejednakowej liczności granice kontrolne karty **u** nie są liniami ciągłymi.