Przykład

Pewna firma zleciła analitykowi rynku przeprowadzenie badań dotyczących udziału tej firmy w rynku, tzn. oszacowania frakcji ludności mieszkającej na danym terenie, która nabywa produkty owej firmy. Na podstawie poprzednich badań oraz informacji o branży analityk skonstruował rozkład *a priori* prawdopodobieństwa różnych udziałów firmy w rynku:

Udział w rynku	Prawdopodobieństwo
0.1	0.05
0.2	0.15
0.3	0.20
0.4	0.30
0.5	0.20
0.6	0.10

Następnie analityk pobrał próbę losową złożoną z 20 osób i stwierdził, że 4 spośród tych osób nabywają produkty badanej firmy.

Niech

θ - udział firmy w rynku, $\theta = ?$

n - liczność próby, $n = 20$

x - liczba elementów wyróżnionych, $x = 4$

Wnioskowanie klasyczne

Estymator udziału firmy w rynku:

$$\hat{\theta} = \frac{x}{n} = \frac{4}{20} = 0.2$$

Wnioskowanie bayesowskie

Prawdopo- dobieństwa *a priori*	+	Informacja z próby	=	Prawdopo- dobieństwa *a posteriori*

Na podstawie informacji z próby musimy obliczyć prawdopodobieństwa $P(x \mid \theta)$ dla poszczególnych θ:

$$P(x \mid \theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x},$$

gdzie

$n = 20, \quad x = 4, \quad \theta \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6\}$.

Otrzymamy:

θ	$P(x \mid \theta)$
0.1	0.089779
0.2	0.218199
0.3	0.130421
0.4	0.034991
0.5	0.004621
0.6	0.000270

Korzystając ze wzoru Bayesa

$$P(\theta \mid x) = \frac{P(x \mid \theta) \cdot P(\theta)}{\sum_i P(x \mid \theta_i) \cdot P(\theta_i)}$$

aktualizujemy prawdopodobieństwa *a priori* łącząc je z informacją z próby i otrzymujemy prawdopodobieństwa *a posteriori* $P(\theta \mid x)$.

Prawdop.
a priori

Informacja
z próby

θ	$P(\theta)$	$P(x \mid \theta)$	$P(x \mid \theta) \cdot P(\theta)$	$P(\theta \mid x)$
0.1	0.05	0.089779	0.004489	0.060052
0.2	0.15	0.218199	0.032730	0.437850
0.3	0.20	0.130421	0.026084	0.348946
0.4	0.30	0.034991	0.010497	0.140429
0.5	0.20	0.004621	0.000924	0.012362
0.6	0.10	0.000270	0.000027	0.000361
Σ	1.00		0.074751	1.000000

Prawdop.
a posteriori

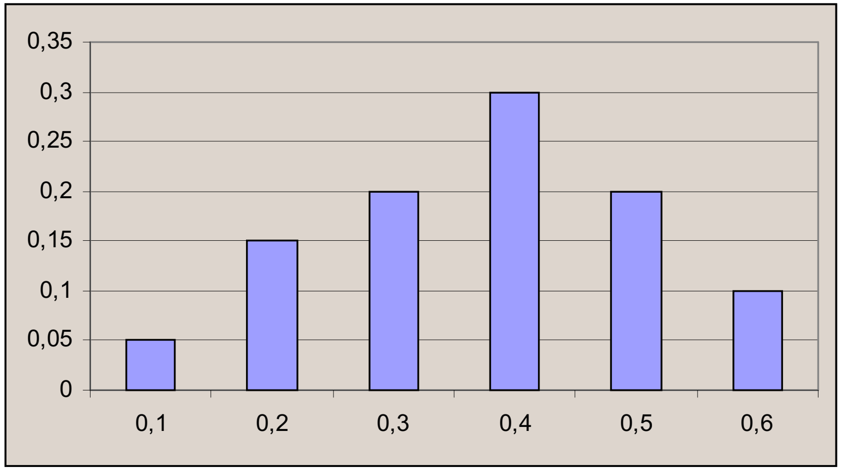
Założmy, że pobrano także drugą próbę złożoną z 16 osób i okazało się, że wśród nich znalazło się 3 nabywców produktów badanej firmy.

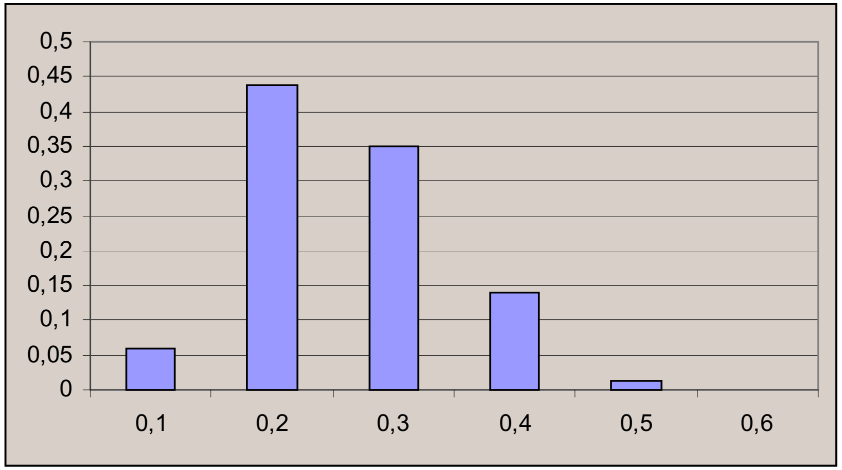
Nowy Rozkład *a priori*

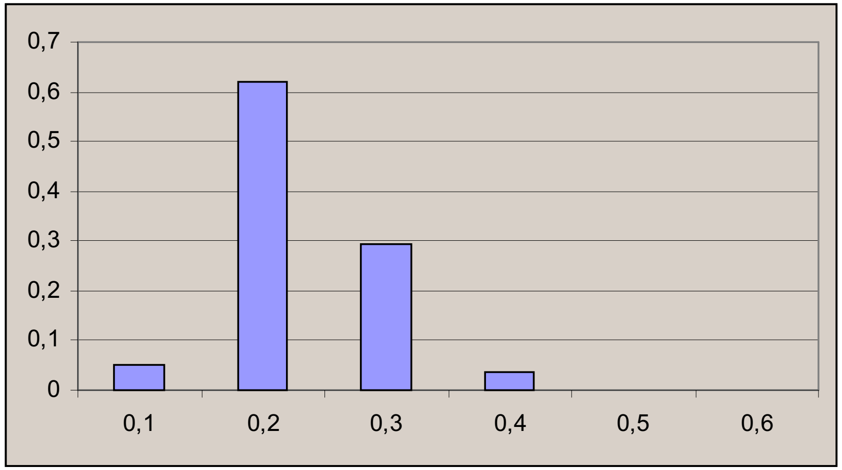
Nowa informacja z próby

θ	$P(\theta)$	$P(x \mid \theta)$	$P(x \mid \theta) \cdot P(\theta)$	$P(\theta \mid x)$
0.1	0.060052	0.142344	0.0085480	0.049074
0.2	0.437850	0.246291	0.1078384	0.619103
0.3	0.348946	0.146496	0.0511193	0.293477
0.4	0.140429	0.04681	0.0065734	0.037738
0.5	0.012362	0.008545	0.0001056	0.000606
0.6	0.000361	0.000812	0.0000003	0.000002
Σ	1.00000		0.1741850	1.000000

Nowy rozkład *a posteriori*







<u>Pytanko:</u>

A co byśmy otrzymali, gdyby wpierw połączyć wyniki pochodzące z obu prób, a dopiero potem uzyskaną w ten sposób informację z próby połączyć z informacją *a priori*?

Wtedy mielibyśmy

$n = 20 + 16 = 36$,

$x = 4 + 3 = 7$

θ	$P(\theta)$	$P(x \mid \theta)$	$P(x \mid \theta) \cdot P(\theta)$	$P(\theta \mid x)$
0.1	0.05	0.0393186	0.0019659	0.049074
0.2	0.15	0.1653428	0.0248014	0.619103
0.3	0.2	0.0587838	0.0117568	0.293477
0.4	0.3	0.0050393	0.0015118	0.037738
0.5	0.2	0.0001215	0.0000243	0.000606
0.6	0.1	0.0000007	0.0000001	0.000002
Σ	1.00		0.040060	1.00000

Przykład

Makler giełdowy interesuje się przychodami, jakie można osiągnąć lokując kapitał w określonych akcjach. Makler jest przekonany, że przychód z akcji ma rozkład normalny, przy czym średni przychód wynosi około 15% rocznie, przy odchyleniu standardowym 8%.

Makler ponadto zbadał zachowanie się cen akcji w ciągu 10 losowo wybranych miesięcy i o obliczył dla tej próby średni przychód i odchylenie standardowe, które wyniosły, odpowiednio, 11.54% i 6.8%.

Przyjmując założenie, że przychody mają rozkład normalny wyznaczyć rozkład *a posteriori* przeciętnego przychodu z akcji.

Rozkład *a priori*: $N(15,8)$,

Informacje z próby: rozkład normalny, $\overline{X} = 11.54,\ \ s = \hat{\sigma} = 6.8$

A zatem rozkład *a posteriori* jest również normalny $N(\mu'', \sigma'')$, przy czym

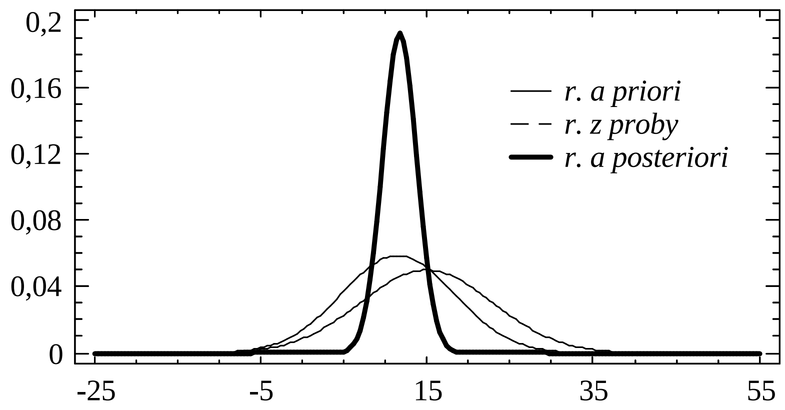
$$\mu'' = \frac{\frac{1}{(\sigma')^2}\mu' + \frac{n}{\sigma^2}\overline{X}}{\frac{1}{(\sigma')^2} + \frac{n}{\sigma^2}}$$

$$(\sigma'')^2 = \frac{1}{\frac{1}{(\sigma')^2} + \frac{n}{\sigma^2}}$$

W naszym przypadku otrzymamy:

$$\mu'' = \frac{\frac{1}{8^2}\cdot 15 + \frac{10}{6.8^2}\cdot 11.54}{\frac{1}{8^2} + \frac{10}{6.8^2}} = 11.77$$

$$\sigma'' = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{8^2} + \frac{10}{6.8^2}}} = 2.077$$



Przypuśćmy teraz, że przekonania maklera były inne, tzn. że średni przychód z akcji wynosi około 15% rocznie, ale przy odchyleniu standardowym 4%. Wówczas otrzymamy:

$$\mu'' = \frac{\frac{1}{4^2}\cdot 15 + \frac{10}{6.8^2}\cdot 11.54}{\frac{1}{4^2}+\frac{10}{6.8^2}} = 12.32$$

$$\sigma'' = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{4^2}+\frac{10}{6.8^2}}} = 1.89$$