ZADANIA Z KOMBINATORYKI

(zadania były rozwiązywane przez studentów z grup IZ201, 205, 209 i 210 przed kolokwiami w trakcie semestru)

Zadanie 1

Wyznacz wartość wyrażenia $F(n) = \sum_{k=1}^{7} (-1)^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} \left\lfloor n \bmod k = 0 \right\rceil$, dla n = 7.

Zadanie 2

Wyznacz wartość wyrażenia $(-6) \bmod 4$.

Zadanie 3

Wyznacz wartość wyrażenia $6 \bmod (-4)$.

Zadanie 4

Relacja *R* jest określona w zbiorze *X* = {1, 2, 3, 4, 5} za pomocą tabeli:

	1	2	3	4	5
1	**1**	0	0	0	0
2	**1**	**1**	0	0	**1**
3	0	**1**	**1**	0	**1**
4	0	0	0	**1**	0
5	0	**1**	0	0	**1**

Zbadaj, czy relacja *R* jest zwrotna, przechodnia, symetryczna, antysymetryczna. Czy relacja *R* jest funkcją?

Zadanie 5

Relacja *R* jest określona w zbiorze *X* = {1, 2, 3, 4, 5} za pomocą tabeli:

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	**1**	0	0	0	0
3	0	0	**1**	**1**	0
4	0	0	0	**1**	**1**
5	0	0	0	0	0

Dopełnij tablicę relacji *R* minimalną liczbą jedynek tak, aby stała się ona tablicą relacji porządkującej zbiór *X*. Uzasadnij dodanie każdej jedynki! Narysuj graf uzupełnionej relacji.

Zadanie 6

Ile różnych relacji można zdefiniować w iloczynie kartezjańskim $A \times B$, jeśli $|A| = m$ i $|B| = n$?
Ile z nich jest relacjami zwrotnymi?
Relacja *R* jest określona w zbiorze liczb rzeczywistych ***R*** : $xRy \Leftrightarrow |x + y| \le 1$.
Zbadaj, czy relacja *R* jest zwrotna, przechodnia, symetryczna i antysymetryczna, i czy jest funkcją.
Odpowiedzi dokładnie uzasadnij! Zaznacz w układzie współrzędnych kartezjańskich zbiór punktów, których współrzędne tworzą pary w podanej relacji *R*.

Zadanie 7

Ile różnych nazw składających się z 3 znaków można utworzyć z 10 cyfr arabskich i 26 liter alfabetu łacińskiego, jeśli nazwa musi zaczynać się literą?

Zadanie 8

Ile liczb naturalnych z przedziału otwartego (100, 1000) można zapisać cyframi nieparzystymi?

Zadanie 9

Ile liczb naturalnych 5 cyfrowych nie mniejszych od 10000 składa się z cyfr {0, 2, 4, 6}?

Zadanie 10

Numer rejestracyjny składa się z 3 liter wybieranych ze zbioru {W, A, R, S, Z} i następujących po nich 2 cyfr wybieranych ze zbioru {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. W numerze rejestracyjnym cyfry mogą się powtarzać, ale litery nie. Ile różnych numerów rejestracyjnych można utworzyć według powyższych reguł?

Zadanie 11
Ile różnych kodów składających się z 5 znaków można utworzyć z 10 cyfr arabskich i 26 wielkich liter alfabetu łacińskiego, jeśli kod musi zaczynać się dwiema różnymi cyframi i kończyć literą oraz jeśli na trzeciej i czwartej pozycji może być zarówno cyfra jak i litera, ale nie może powtórzyć się ta sama litera?

Zadanie 12
Mamy do dyspozycji zbiór znaków składający się z 26 liter i 10 cyfr oraz tablicę 3×3 o 9 polach.

Na ile sposobów można wypełnić tablicę znakami, jeśli muszą być spełnione dwa warunki:
- jeden z wierszy zawiera wyłącznie cyfry, a dwa pozostałe wyłącznie litery,
- w każdym wierszu wszystkie znaki są różne.

Zadanie 13
Na ile sposobów można przydzielić 5 ponumerowanych procesów do wykonania 3 ponumerowanym procesorom, jeśli procesy są wykonywane przez procesor zawsze w całości i należy określić kolejność wykonywania procesów dla procesora, któremu przydzielono więcej niż jeden proces.

Zadanie 14
Plan produkcji wymaga podania stanowiska montażowego dla każdego urządzenia i wskazania kolejności montowania urządzeń na każdym ze stanowisk. Których planów produkcji jest więcej i ile razy: planów montowania 4 urządzeń na 6 stanowiskach, czy planów montowania 6 urządzeń na 4 stanowiskach.

Zadanie 15
Dla dwóch permutacji

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 13 & 1 & 6 & 2 & 3 & 14 & 9 & 7 & 12 & 8 & 10 & 11 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ i}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 13 & 14 & 1 & 6 & 5 & 11 & 7 & 8 & 12 & 9 & 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

rozłóż na rozłączne cykle permutację $h = f^{-1}g^{-1}$, wyznacz typ i znak tej permutacji.

Zadanie 16
Dla dwóch permutacji

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 8 & 3 & 7 & 6 & 12 & 11 & 15 & 13 & 14 & 5 & 16 & 10 & 2 & 4 & 17 & 1 & 9 \end{pmatrix} \text{ i}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 7 & 15 & 6 & 5 & 14 & 10 & 16 & 3 & 4 & 13 & 2 & 17 & 8 & 11 & 1 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

rozłóż na rozłączne cykle permutację $h = (f\,g)^{-1}$, wyznacz typ i znak sgn(h) tej permutacji.

Zadanie 17
Określ znak permutacji f^{-1}, jeśli wiadomo, że permutacja f jest typu $1^2 2^3 3^1 4^2$.
Dokładnie uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 18
Na ile sposobów można wykleić na ścianie kwadrat mając do dyspozycji 25 różnokolorowych kafelków?

Zadanie 19
Ile jest permutacji f zbioru siedmioelementowego, dla których $f(4) = 4$?

Zadanie 20
Na ile sposobów można ułożyć litery { a, b, c, d, e, f } w ciąg, tak aby litery { a, b } były obok siebie.

Zadanie 21
Dla podanych 3 podzbiorów zbioru $X = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ wyznacz wektory charakterystyczne $\xi(A_i)$ i podaj jakie liczby dziesiętne z zakresu 0÷255 mogą reprezentować te podzbiory:
$A_1 = \{b, d, h\}$, $A_2 = \{a, c, e, h\}$, $A_3 = \{d, e, f\}$.

Zadanie 22
Jakie podzbiory zbioru $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ są wskazywane przez liczby 24, 37 i 71?
Podaj wektory charakterystyczne dla tych podzbiorów.

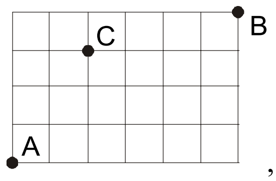
Zadanie 23
Wypisz wszystkie podzbiory zbioru $\{a, b, c, d\}$, wraz z ich wektorami charakterystycznymi, w kolejności zadanej kodem Graya.

Zadanie 24
Do pracy zgłosiło się 16 tłumaczy znających języki rosyjski, hiszpański lub angielski: 12 z nich znało język rosyjski, 15 znało hiszpański, a język angielski znało tylu samo co rosyjski i hiszpański jednocześnie. Ilu z nich znało języki hiszpański i angielski, ale nie znało rosyjskiego, jeśli wiadomo, że 8 znało rosyjski i angielski?

Zadanie 25
Do pracy zgłosiło się 22 tłumaczy: 13 z nich znało język francuski, 14 znało włoski, język niemiecki znało tylu samo co francuski i włoski jednocześnie, 6 z tłumaczy znało francuski i niemiecki a 4 z tłumaczy znało języki włoski i niemiecki, ale nie znało francuskiego.
Ilu tłumaczy nie znało ani jednego z wymienionych języków?

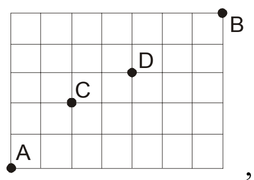
Zadanie 26
Oblicz ile wynosi współczynnik liczbowy przy wyrazie $x^4 \cdot y^3$ w rozwinięciu dwumianu $(x - 2y)^7$.

Zadanie 27

Ile jest najkrótszych dróg na podanym planie miasta: 

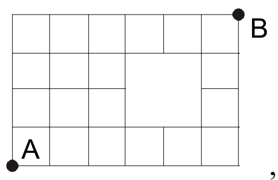
,
które prowadzą z punktu A do B, ale nie przechodzą przez punkt C?
Posłuż się współczynnikami dwumianowymi.

Zadanie 28

Ile jest najkrótszych dróg na podanym planie miasta: 

, które prowadzą z punktu A do B i przechodzą przez oba punkty C i D? Posłuż się współczynnikami dwumianowymi.

Zadanie 29

Ile jest najkrótszych dróg na podanym planie miasta: 

,
które prowadzą z punktu A do B? Posłuż się współczynnikami dwumianowymi.

Zadanie 30
Ile różnych liczb 7 cyfrowych można utworzyć, zapisując w dowolnej kolejności 7 cyfr 8, 8, 8, 8, 5, 5 i 2 ?

Zadanie 31
Łańcuch RNA to sekwencja zasad amonowych czterech rodzajów oznaczanych symbolami C, G, U i A. Ile łańcuchów może powstać jako sekwencja 12 zasad, jeśli wiadomo, że każdy z nich składa się z 4 zasad C, 3 zasad G, 3 zasad U i 2 zasad A, oraz zaczyna się sekwencją CCA, a kończy GUC?

Zadanie 32
Wyznacz liczbę nieujemnych rozwiązań całkowitoliczbowych dla równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$, w których $x_3 = 2$.

Zadanie 33
Wyznacz dla równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$ liczbę nieujemnych rozwiązań całkowitoliczbowych, w których $x_1 \geq 2, x_2 \geq 1, x_3 = 2, x_4 \geq 3, x_5 > 2$.
Wskazówka: trzeba wykonać podstawienie zmiennych.

Zadanie 34
Dla zbioru z powtórzeniami $X = < 3*a, 2*b, 5*c >$ skonstruuj funkcję tworzącą dla ciągu liczb podzbiorów k-elementowych, w których każdy z elementów a, b i c występuje nieparzystą liczbę razy. Ile takich podzbiorów zawiera ponad 5 elementów?

Zadanie 35
Dla zbioru z powtórzeniami $X = < 3*a, 4*b, 2*c, 3*d >$ rozważ podzbiory, w których każdy z elementów a, b, c i d nie występuje lub występuje parzystą liczbę razy. Ile takich podzbiorów zawiera 6 lub 8 elementów?

Zadanie 36
W barze sałatkowym pozostały 2 porcje fasolki, 2 porcje kiełków i 2 porcja ananasa. Każda porcja kosztuje 50 gr. Ile różnych sałatek można zmieszać za dokładnie 1 zł i 50 gr?

Zadanie 37
Na ile sposobów można podzielić zbiór 6 elementowy na 3 bloki?
Wyprowadź odpowiedź z własności rekurencyjnej.

Zadanie 38
Na ile sposobów można podzielić zbiór cyfr {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9} na 4 bloki, tak aby cyfry parzyste były razem w tym samym bloku? Wyprowadź odpowiedź z własności rekurencyjnej.

Zadanie 39
Narysuj tablicę dla relacji równoważności, która jest związana z podziałem zbioru X={a, b, c, d, e} na dwa bloki: {a, c, d} i {b, e}?

Zadanie 40
Jaki podział i na ile bloków odpowiada funkcji $f: X \to Y$ określonej w następujący sposób:
$f(x) = x \bmod 3$, dla $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $Y = \{0, 1, 2\}$.
Ile jest w tym przypadku wszystkich surjekcji $f: X \to Y$?

Zadanie 41
Dla jakiej liczby ciąg 5, 5, 2, 1 jest podziałem. Wyznacz dla niego podział sprzężony i dla obu tych podziałów narysuj diagram Ferrersa. Czy dla danej liczby naturalnej większej od 10, podziałów na 5 składników jest więcej, czy mniej niż podziałów o największym składniku równym 5? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 42
Na ile sposobów można podzielić liczbę 11 na 3 składniki? Wyprowadź odpowiedź z własności rekurencyjnej.