ZEBRANE ZADANIA DOMOWE Z ĆWICZEŃ NA STUDIACH ZAOCZNYCH (KURS **MDA**)

Zadanie 1

Wyznacz wartość wyrażenia $F(n)=\sum_{k=1}^{7}(-1)^{\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor} \lfloor n \bmod k = 0 \rceil$, dla n = 7.

Zadanie 2

Wyznacz wartość wyrażenia (–6) mod 4.

Zadanie 3

Wyznacz wartość wyrażenia 6 mod (–4).

Zadanie 4

W zbiorze X = {1, 2, 3, 4, 5} zdefiniowano relacje binarne za pomocą tabel:

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	0	1
2	0	1	1	0	0
3	1	1	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	1	0	0	0	1

,

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	0	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	1	0	1	0	1

,

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	1
2	0	1	0	1	1
3	0	0	0	0	0
4	1	1	0	1	1
5	1	1	0	1	1

,

	1	2	3	4	5
1	1	0	1	0	1
2	0	1	1	1	0
3	1	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0
5	1	0	1	0	1

,

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	1	1	0	0	1
3	0	1	1	0	1
4	0	0	0	1	0
5	0	1	0	0	1

.

Zbadaj dla każdej z nich, czy zdefiniowana relacja jest zwrotna, przechodnia, symetryczna, antysymetryczna. Narysuj graf dla każdej z relacji.

Zadanie 5

W zbiorze X = {1, 2, 3, 4, 5} zdefiniowano relacje binarne za pomocą tabel:

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	0	1
2	0	1	1	0	0
3	0	0	1	0	1
4	0	1	0	1	0
5	0	0	0	0	1

,

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	0	1
2	0	0	1	1	1
3	0	0	1	0	0
4	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1

,

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	1	0
2	1	1	1	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	1	1	1
5	0	0	0	0	1

,

	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0

.

Dopełnij każdą z tablic relacji minimalną liczbą jedynek tak, aby stała się ona tablicą relacji porządku w zbiorze X. Uzasadniaj dodanie każdej jedynki.

Zadanie 6

W zbiorze X = {1, 2, 3, 4, 5} zdefiniowano relacje binarne za pomocą tabel:

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	1	1	0
5	1	0	0	0	1

,

	1	2	3	4	5
1	1	1	0	1	1
2	1	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	1	0	1	1
5	1	1	0	1	1

,

	1	2	3	4	5
1	1	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0
3	0	1	1	1	0
4	0	0	1	1	0
5	0	0	0	0	1

.

Dopełnij każdą z tablic relacji minimalną liczbą jedynek tak, aby stała się ona tablicą relacji równoważności w zbiorze X. Uzasadniaj dodanie każdej jedynki.

Zadanie 7

Ile różnych relacji można zdefiniować w iloczynie kartezjańskim $A \times B$, jeśli $|A| = m$ i $|B| = n$?
Ile można zdefiniować relacji zwrotnych, a ile symetrycznych?
Relacja R jest określona w zbiorze liczb rzeczywistych $\boldsymbol{R}$: $xRy \Leftrightarrow | x + y | \leq 1$.
Zbadaj, czy relacja R jest zwrotna, przechodnia, symetryczna, antysymetryczna i czy jest funkcją.
Odpowiedzi dokładnie uzasadnij! Zaznacz w układzie współrzędnych kartezjańskich zbiór punktów, których współrzędne tworzą pary w podanej relacji R.

Zadanie 8

Ile różnych nazw składających się z 3 znaków można utworzyć z 10 cyfr arabskich i 26 liter alfabetu łacińskiego, jeśli nazwa musi zaczynać się literą?

Zadanie 9
Ile liczb naturalnych z przedziału otwartego (100, 1000) można zapisać cyframi nieparzystymi?

Zadanie 10
Ile liczb naturalnych 5 cyfrowych nie mniejszych od 10000 składa się z cyfr {0, 2, 4, 6}?

Zadanie 11
Numer rejestracyjny składa się z 3 liter wybieranych ze zbioru {W, A, R, S, Z} i następujących po nich 2 cyfr wybieranych ze zbioru {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. W numerze rejestracyjnym cyfry mogą się powtarzać, ale litery nie. Ile różnych numerów rejestracyjnych można utworzyć według powyższych reguł?

Zadanie 12
Ile różnych kodów składających się z 5 znaków można utworzyć z 10 cyfr arabskich i 26 wielkich liter alfabetu łacińskiego, jeśli kod musi zaczynać się dwiema różnymi cyframi i kończyć literą oraz jeśli na trzeciej i czwartej pozycji może być zarówno cyfra jak i litera, ale nie może powtórzyć się ta sama litera?

Zadanie 13
Mamy do dyspozycji zbiór znaków składający się z 26 liter i 10 cyfr oraz tablicę 3×3 o 9 polach.

Na ile sposobów można wypełnić tablicę znakami, jeśli muszą być spełnione dwa warunki:

- jeden z wierszy zawiera wyłącznie cyfry, a dwa pozostałe wyłącznie litery,
- w każdym wierszu wszystkie znaki są różne.

Zadanie 14
Na ile sposobów można przydzielić 5 ponumerowanych procesów do wykonania 3 ponumerowanym procesorom, jeśli procesy są wykonywane przez procesor zawsze w całości i należy określić kolejność wykonywania procesów dla procesora, któremu przydzielono więcej niż jeden proces.

Zadanie 15
Plan produkcji wymaga podania stanowiska montażowego dla każdego urządzenia i wskazania kolejności montowania urządzeń na każdym ze stanowisk. Których planów produkcji jest więcej i ile razy: planów montowania 4 urządzeń na 6 stanowiskach, czy planów montowania 6 urządzeń na 4 stanowiskach.

Zadanie 16
Dla dwóch permutacji

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 13 & 1 & 6 & 2 & 3 & 14 & 9 & 7 & 12 & 8 & 10 & 11 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{i}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 13 & 14 & 1 & 6 & 5 & 11 & 7 & 8 & 12 & 9 & 10 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

rozłóż na rozłączne cykle permutację $h = f^{-1}g^{-1}$, wyznacz typ i znak tej permutacji.

Zadanie 17
Dla dwóch permutacji

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 8 & 3 & 7 & 6 & 12 & 11 & 15 & 13 & 14 & 5 & 16 & 10 & 2 & 4 & 17 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{i}$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 7 & 15 & 6 & 5 & 14 & 10 & 16 & 3 & 4 & 13 & 2 & 17 & 8 & 11 & 1 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

rozłóż na rozłączne cykle permutację $h = (f\,g)^{-1}$, wyznacz typ i znak sgn(h) tej permutacji.

Zadanie 18
Określ znak permutacji f^{-1}, jeśli wiadomo, że permutacja f jest typu $1^2 2^3 3^1 4^2$.
Dokładnie uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 19
Na ile sposobów można wykleić na ścianie kwadrat mając do dyspozycji 25 różnokolorowych kafelków?

Zadanie 20
Ile jest permutacji *f* zbioru siedmioelementowego, dla których $f(4) = 4$?

Zadanie 21
Na ile sposobów można ułożyć litery { a, b, c, d, e, f } w ciąg, tak aby litery { a, b } były obok siebie.

Zadanie 22
Dla podanych 3 podzbiorów zbioru X = {a, b, c, d, e, f, g, h} wyznacz wektory charakterystyczne $\xi(Ai)$
i podaj jakie liczby dziesiętne z zakresu 0÷255 mogą reprezentować te podzbiory:
A_1 = {b, d, h}, A_2 = {a, c, e, h}, A_3 = {d, e, f }.

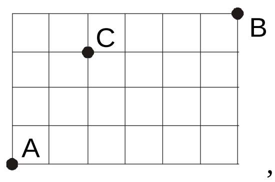
Zadanie 23
Jakie podzbiory zbioru X = {a, b, c, d, e, f, g} są wskazywane przez liczby 24, 37 i 71?
Podaj wektory charakterystyczne dla tych podzbiorów.

Zadanie 24
Wypisz wszystkie podzbiory zbioru {a, b, c, d}, wraz z ich wektorami charakterystycznymi, w kolejności zadanej kodem Graya.

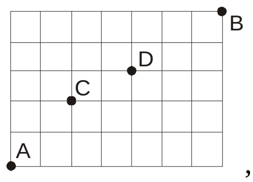
Zadanie 25
Do pracy zgłosiło się 16 tłumaczy znających języki rosyjski, hiszpański lub angielski: 12 z nich znało język rosyjski, 15 znało hiszpański, a język angielski znało tyle samo tłumaczy, co rosyjski i hiszpański jednocześnie. Ilu z nich znało języki hiszpański i angielski, ale nie znało rosyjskiego, jeśli wiadomo, że 8 znało rosyjski i angielski?

Zadanie 26
Do pracy zgłosiło się 22 tłumaczy: 13 z nich znało język francuski, 14 znało włoski, język niemiecki znało tyle samo tłumaczy, co francuski i włoski jednocześnie, 6 z tłumaczy znało francuski i niemiecki a 4 z tłumaczy znało języki włoski i niemiecki, ale nie znało francuskiego.
Ilu tłumaczy nie znało ani jednego z wymienionych języków?

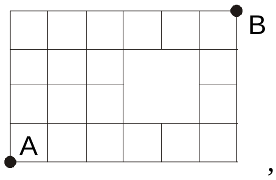
Zadanie 27
Oblicz ile wynosi współczynnik liczbowy przy wyrazie $x^4 \cdot y^3$ w rozwinięciu dwumianu $(x-2y)^7$.

Zadanie 28
Ile jest najkrótszych dróg na podanym planie miasta: 

,
które prowadzą z punktu A do B, ale nie przechodzą przez punkt C?
Posłuż się współczynnikami dwumianowymi.

Zadanie 29
Ile jest najkrótszych dróg na podanym planie miasta: 

, które prowadzą z punktu A do B i przechodzą przez oba punkty C i D? Posłuż się współczynnikami dwumianowymi.

Zadanie 30
Ile jest najkrótszych dróg na podanym planie miasta: 

,
które prowadzą z punktu A do B? Posłuż się współczynnikami dwumianowymi.

Zadanie 31
Ile różnych liczb 7 cyfrowych można utworzyć, zapisując w dowolnej kolejności 7 cyfr 8, 8, 8, 8, 5, 5 i 2 ?

Zadanie 32
Łańcuch RNA to sekwencja zasad amonowych czterech rodzajów oznaczanych symbolami C, G, U i A. Ile łańcuchów może powstać jako sekwencja 12 zasad, jeśli wiadomo, że każdy z nich składa się z 4 zasad C, 3 zasad G, 3 zasad U i 2 zasad A, oraz zaczyna się sekwencją CCA, a kończy GUC?

Zadanie 33
Wyznacz liczbę nieujemnych rozwiązań całkowitoliczbowych dla równania
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 12$, w których $x_3 = 2$.

Zadanie 34
Wyznacz dla równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19$ liczbę nieujemnych rozwiązań całkowitoliczbowych, w których $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 1$, $x_3 = 2$, $x_4 \geq 3$, $x_5 > 2$.
Wskazówka: trzeba wykonać podstawienie zmiennych.

Zadanie 35
Ile jest nieujemnych i całkowitych rozwiązań nierówności $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 6$,
które spełniają warunki: $x_1 > 0$ i x_1 parzyste, $x_2 \in \{0, 1\}$, x_3 podzielne przez 3 oraz $x_4 \leq 2$.
Wskazówka: trzeba wyznaczyć funkcję tworzącą.

Zadanie 36
Dla zbioru z powtórzeniami $X = < 3{*}a, 2{*}b, 5{*}c >$ skonstruuj funkcję tworzącą dla ciągu liczb podzbiorów k-elementowych, w których każdy z elementów a, b i c występuje nieparzystą liczbę razy.
Ile takich podzbiorów zawiera ponad 5 elementów?

Zadanie 37
Dla zbioru z powtórzeniami $X = < 3{*}a, 4{*}b, 2{*}c, 3{*}d >$ rozważ podzbiory, w których każdy z elementów a, b, c i d nie występuje lub występuje parzystą liczbę razy.
Ile takich podzbiorów zawiera 6 lub 8 elementów?

Zadanie 38
W barze sałatkowym pozostały 2 porcje fasolki, 2 porcje kiełków i 2 porcja ananasa. Każda porcja kosztuje 50 gr. Ile różnych sałatek można zmieszać za dokładnie 1 zł i 50 gr?

Zadanie 39
Na ile sposobów można podzielić zbiór 6 elementowy na 3 bloki?
Wyprowadź odpowiedź z własności rekurencyjnej.

Zadanie 40
Na ile sposobów można podzielić zbiór cyfr {1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9} na 4 bloki tak, aby cyfry parzyste były razem w tym samym bloku? Wyprowadź odpowiedź z własności rekurencyjnej.

Zadanie 41
Narysuj tablicę dla relacji równoważności, która jest związana z podziałem zbioru X={a, b, c, d, e} na dwa bloki: {a, c, d} i {b, e}?

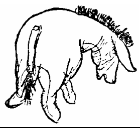
Zadanie 42
Na ile sposobów można przydzielić 9 ponumerowanych procesów 4 ponumerowanym procesorom tak, że pierwsze dwa procesy będą wykonane na pierwszym procesorze?
Przydzielić trzeba wszystkie procesy, żaden z procesorów nie może pozostać bezczynny i każdy proces będzie w całości wykonany na jednym procesorze.

Zadanie 43
Jaki podział i na ile bloków odpowiada funkcji $f : X \rightarrow Y$ określonej w następujący sposób:
$f(x) = x \bmod 3$, dla $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $Y = \{0, 1, 2\}$.
Ile jest w tym przypadku wszystkich surjekcji $f : X \rightarrow Y$?

Zadanie 44
Dla jakiej liczby ciąg 5, 5, 2, 1 jest podziałem. Wyznacz dla niego podział sprzężony i dla obu tych podziałów narysuj diagram Ferrersa. Czy dla danej liczby naturalnej większej od 10, podziałów na 5 składników jest więcej, czy mniej niż podziałów o największym składniku równym 5? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 45
Na ile sposobów można podzielić liczbę 11 na 3 składniki? Wyprowadź odpowiedź z własności rekurencyjnej.

Zadanie 46
Na ile sposobów można rozdzielić 8 jednakowych procesów pomiędzy 4 jednakowe procesory tak, aby na jednym z nich zostały wykonane 3 procesy?
Rozdzielić trzeba wszystkie procesy, żaden z procesorów nie może pozostać bezczynny i każdy proces musi być w całości wykonany na jednym procesorze.



Zadanie 47
Sprawdzić zwrotność, symetrię, antysymetrię i przechodniość relacji określonych następującymi tabelami:

1	1	1		1
	1	1		
1	1	1		
			1	
1				1

1		1		1
	1		1	
1		1		1
	1		1	
1		1		1

1			1	1
	1		1	1
1	1		1	1
1	1		1	1

1		1		1
	1	1	1	
1		1		1
	1	1	1	
1		1		1

Zadanie 48
Uzupełnić tabele minimalną liczbą jedynek tak, aby definiowały relacje równoważności:

1				1
	1		1	
		1	1	
	1	1	1	
1				1

1	1		1	1
1	1		1	
		1		
	1		1	1
1	1		1	1

1				
	1	1		
	1	1	1	
		1	1	
				1

Zadanie 49
Uzupełnić tabele minimalną liczbą jedynek tak, aby definiowały relacje porządku:

1	1	1		1
	1	1		
		1		1
	1		1	
				1

1	1	1		1
		1	1	1
		1		
		1		
				1

1			1	
1	1	1	1	
		1		
		1	1	1
				1

Zadanie 50
Sprawdzić, czy podane tabele definiują funkcje $f : \{1,..,6\} \to \{1,..5\}$ (pierwsza kolumna oznacza dziedzinę, a pierwszy wiersz przeciwdziedzinę funkcji).

f	1	2	3	4	5
1					1
2		1			
3					1
4		1			
5					1
6	1				

f	1	2	3	4	5
1				1	
2	1				
3					1
4			1		
5					
6	1				

f	1	2	3	4	5
1					1
2			1		
3				1	
4		1			
5	1				1
6	1				

Zadanie 51
Obliczyć liczbę wszystkich relacji: a) symetrycznych,   b) antysymetrycznych
w zbiorze {1, 2, 3, 4, 5} (także w ogólnym przypadku w zbiorze{1, 2, ..., n}).

Zadanie 52
Obliczyć liczbę wszystkich relacji: a) symetrycznych,   b) antysymetrycznych
w zbiorze {1, 2, 3, 4, 5}, które zawierają relację $R = \{(1,1),(2,2),(4,4),(1,3),(3,5),(4,2)\}$.

Zadanie 53
Ile jest wszystkich funkcji określonych na zbiorze $\{\{a,b\},\{b,c\},a,b,c\}$ o wartościach w zbiorze $\{\{1,2\},\{2,3,4\}\}$?

Zadanie 54
Ile jest funkcji różnowartościowych określonych na zbiorze {1,...,10} w ten sam zbiór?
Ile spośród tych funkcji w punkcie 2 przyjmuje wartość 4, natomiast w punkcie 6 przyjmuje wartość 9?

Zadanie 55
W pewnej firmie jest 5 działów. Do pracy przyjęto 8 nowych pracowników. Na ile sposobów można ich przydzielić do działów, jeżeli:
a) nie nakładamy żadnych ograniczeń na przydział?
b) do 1. działu nie trafiła żadna osoba?
c) do 3. działu trafiła przynajmniej jedna osoba?
d) do 1. działu trafiły dokładnie 4 osoby?

Zadanie 56
W firmie jest 8 działów. Przyjęto 5 nowych pracowników i przydzielono ich do działów pojedynczo.
Na ile sposobów można ich przydzielić:
a) bez żadnych dodatkowych założeń?
b) jeśli Kowalski ma się znaleźć w dziale A lub B?
c) jeśli, ani Kowalski, ani Iksiński nie trafiają do działu A?

Zadanie 57
Dany jest zbiór liczba naturalnych {1,...15}. Na ile sposobów możemy wybrać 6-elementowy podzbiór tak, aby zawierał liczby 8 i 15. Na ile sposobów możemy wybrać tak, aby zawierał 8, lecz nie zawierał 15?

Zadanie 58
Grupę 12 pracowników postanowiono podzielić na 2 zespoły. Na ile sposobów można to zrobić, jeśli:
a) jeden zespół ma mieć 7 pracowników, a drugi 5?
b) obydwa mają mieć po 6 pracowników?
c) obydwa mają mieć po 6 pracowników oraz Kowalski i Iksiński muszą trafić do różnych zespołów?

Zadanie 59
Znaleźć liczbę permutacji zbioru {1...12} takich, że:
a) 1, 2, 3 stoją obok siebie.
b) 1, 2 lub 4,5 stoją obok siebie (wskazówka: jest to suma permutacji takich, że 1, 2 stoją obok siebie ze zbiorem permutacji takich, że 4 i 5 stoją obok siebie; moc sumy liczymy sumując moce tych dwóch zbiorów i odejmując moc części wspólnej).

Zadanie 60
Dany jest rząd szesnastu krzeseł, na których posadzono 16 osób. Wśród tych 16 osób jest 4-osobowa rodzina oraz drugie małżeństwo. Obliczyć liczbę takich rozmieszczeń, że:
a) członkowie 4 –osobowej rodziny siedzą obok siebie.
b) przynajmniej jedna para małżonków będzie siedziała obok siebie.

Zadanie 61
Na karuzeli jest 8 siedzeń. Na ile sposobów może na niej usiąść 8 osób?

Zadanie 62
W kolejce do 3 okienek stoi 10 osób.

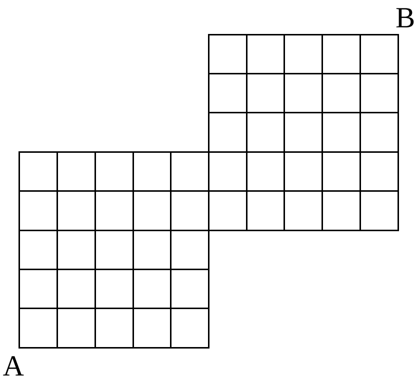
a) Ile jest wszystkich ustawień?
b) Ile jest ustawień takich, że do 1. okienka nikt się nie zgłosił?
c) Ile jest ustawień takich, że przy 1.okienku jest 5 osób?

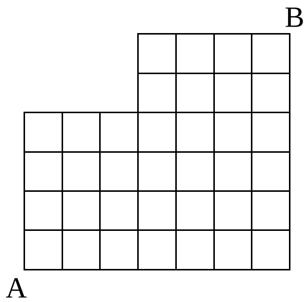
Zadanie 63
W pewnej miejscowości mieszka 1845 osób. Udowodnić, że co najmniej 6 z nich ma urodziny tego samego dnia roku.

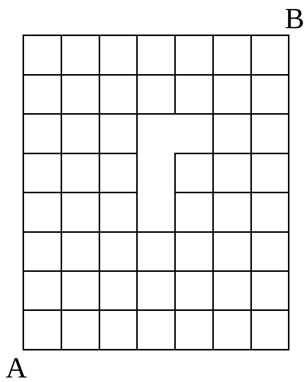
Zadanie 64
Dana jest grupa miliona obywateli RP, o majątku liczonym w pełnych złotych wynoszącym co najwyżej 90 000 złotych. Udowodnić, iż co najmniej 12 spośród nich dysponuje tą samą wielkością majątku.

Zadanie 65
Dany jest zbiór funkcji $f:\{1..4\} \to \{1..5\}$. Udowodnić, że wśród tych funkcji istnieje co najmniej 21 posiadających ten sam zbiór wartości funkcji.

Zadanie 66
Obliczyć liczbę najkrótszych dróg z A do B, w następujących obszarach:







Wskazówka: w pierwszym obszarze jest to suma zbiorów dróg przechodzących przez punkty łączące kwadraty ; w obszarze drugim należy usunąć ze zbioru wszystkich dróg idących z A do B, wszystkie drogi przechodzące przez jeden z trzech punktów znajdujących się w rzędzie powyżej istniejącego (suma zbiorów dróg przechodzących przez te punkty); w obszarze trzecim ze zbioru wszystkich dróg Za do B, usuwamy sumę zbiorów dróg przechodzących bądź przez dwa odcinki poziome bądź przez odcinek pionowy; należy pamiętać, iż w każdym z przykładów sumujemy zbiory, które nie są rozłączne.

Zadanie 67
Dzieci zrobiły łańcuch na choinkę z 5 kawałków niebieskiego, 6 kawałków czerwonego, 7 kawałków żółtego, 5 kawałków zielonego oraz 6 kawałków srebrzystego papieru. Na końcu łańcucha przyczepiły gwiazdę.

a) Na ile sposobów mogły utworzyć łańcuch, przy założeniu, że na początku i końcu był kolor czerwony.
b) Na ile sposobów można utworzyć, jeśli wiadomo, że początku lub na końcu był kolor czerwony.
c) Na ile sposobów można utworzyć, jeśli wiadomo, że początku lub na końcu nie było koloru czerwonego.

Zadanie 68
Znajdź liczbę rozwiązań całkowitoliczbowych nierówności:

a) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 8$ gdzie x_1 parzyste, x_2 nieparzyste, $3 \le x_3 \le 6$, $2 \le x_4 \le 4$.
b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_5 \le 9$ gdzie x_1 nieparzyste, $x_2 \in \{0,1\}$, $x_3 \in \{2,4\}$, $x_4 + x_5 = 3$.

Zadanie 69
Na talerzach żółtym, czerwonym, zielonym i czarnym rozmieszczono 16 jednakowych morelek. Na ile sposobów można to zrobić, jeżeli wiadomo, że:

a) Wszystkie talerze były zajęte.
b) Dokładnie jeden talerz był pusty.
c) Na żółtym talerzu znalazły się 4 morelki.

Zadanie 70
Pan Kowalski postanowił kupić kilka psów. Udał się więc do hodowcy, który miał do sprzedania 3 szczeniaczki foksterierów, 4 wyżły, 3 cocker spaniele i 4 sznaucery.
Na ile sposobów pan Kowalski mógł wybrać psy, jeśli postanowił kupić:

a) trzy psy?
b) cztery psy?

Pan Kowalski rozróżnia psy tylko ze względu na rasę.

Zadanie 71
W trzech jednakowych pudełkach zostało rozmieszczonych 10 jednakowych klocków.
Obliczyć ile jest wszystkich rozmieszczeń, jeśli wiemy, że żadne pudełko nie jest puste.

Zadanie 72
Do czterech zespołów przyjęto 12 nowych pracowników. Na ile sposobów można to zrobić, jeśli:

a) Każdy zespół ma zostać wzmocniony?
b) Do zespołu nr 1 trafiają 4 nowe osoby?
c) Do zespołu nr 1 trafiają 4 nowe osoby i pozostałe zespoły też muszą być wzmocnione?

Zadanie 73
Na wycieczkę trzema jednakowymi autokarami ma jechać grupa osób. W dniu odjazdu na początku pojawiło się 12 osób. Na ile sposobów początkowa grupa może się rozlokować w autokarach?

Zadanie 74
Na pięciu stanowiskach pracowało 5 szwaczek, szyjących jednakowe pidżamy. Ile możliwych wyników wykonania planu można im przyporządkować, jeśli wiadomo, że uszyły danego dnia 21 pidżam i każda uszyła co najmniej jedną pidżamę?

Zadanie 75
Trzynastu ufoludków postanowiło wybrać się w podróż międzygalaktyczną jednakowymi statkami kosmicznymi. Na ile sposobów mogą wsiąść do statków, jeśli wiadomo, ze najliczniejsza załoga liczy pięciu członków, a ufoludki uważamy za nierozróżnialne?

Zadanie 76
Na ile sposobów można podzielić 14-osobową grupę na 3 podgrupy, z których jedna liczy 6 osób, a dwie pozostałe po 4 osoby?

Zadanie 77
Babcia ugotowała kompot z 15 jednakowych śliwek, który rozlała do 4 jednakowych słoików. Ile jest rozmieszczeń śliwek w słoikach, jeśli w każdym muszą być co najmniej 2 śliwki?

Zadanie 78
Na kurs języka francuskiego zgłosiło się 11 osób, które mają dołączyć do trzech istniejących grup, odbywających zajęcia w różnych terminach. W jaki sposób można ich przydzielić tak, aby :

a) Do każdej z grup trafiła przynajmniej jedna osoba?
b) Nowe osoby trafiły do dokładnie dwóch grup?

Pomoc do obliczania podziałów liczby: $P(n, n-1) = 1$ oraz $P(n,2) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Zadanie 79
Niech A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} i B = {3, 6, 9}. Dla tych zbiorów znajdź:

a) $(A \setminus B) \cup B$
b) $A \otimes B$
c) $A \setminus (A \otimes B)$.

Zadanie 80
Podaj przykłady takich zbiorów A i B, że

a) $(A \setminus B) \cup B = A$
b) $A \otimes B = A$
c) $A \setminus (A \otimes B) = \emptyset$

Zadanie 81
Obliczyć dla n = 8 wartość

$$\sum_{k=1}^{7} (-1)^{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor} \lfloor k \mid n \rceil$$

Zadanie 82
Sprawdź związki:

$$n = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \quad , n \in \mathbf{Z}$$

$$n = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \quad , n \in \mathbf{Z}$$

Zadanie 83
W zbiorze A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} określono relację: $x\,R\,y \Leftrightarrow 5 \mid x^3 - y^3$.
Sprawdź, czy jest to relacja zwrotna, przechodnia, symetryczna, antysymetryczna, czy jest relacją równoważności i czy jest funkcją. Narysuj graf relacji.

Zadanie 84
W zbiorze A = {2, 4, 5, 16, 25, 125} określono relację: $x\,R\,y \Leftrightarrow$ istnieje liczba naturalna k taka, że $y = x^k$.
Sprawdź, czy jest to relacja zwrotna, przechodnia, symetryczna, antysymetryczna, czy jest relacją częściowego porządku. Narysuj graf relacji.

Zadanie 85
Relacja R jest określona w zbiorze X = {1, 2, 3, 4, 5}. Następujące pary należą do relacji:
(1, 2), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (2, 5), (3, 3), (4, 4), (4, 5).
Czy tak określona relacja jest relacją częściowego porządku? Jeśli nie jest, to uzupełnij ją przez dodanie jak najmniejszej liczby par (m, n) tak, aby była relacją częściowego porządku.

Zadanie 86
Rozpatrz czterocyfrowe liczby utworzone z cyfr nieparzystych. Ile jest takich liczb, że

a) wszystkie cyfry są różne?
b) cyfra 1 występuje w takiej liczbie co najmniej raz?

Zadanie 87
Na ile sposobów można ustawić litery a, b, c, d, e, f w takiej kolejności, by litery a i b sąsiadowały ze sobą?

Zadanie 88
Ile jest liczb czterocyfrowych, w których:
a) wszystkie cyfry są różne?
b) nie występują cyfry 1, 2, 5, zaś cyfry 0, 3 występują?

Zadanie 89
Numer rejestracyjny składa się z 2 liter wybieranych ze zbioru {B, C, D, E, F}, następujących po nich 4 cyfr wybieranych ze zbioru {0, 1, 2, 3, 4, 5} i jednej litery na końcu ze zbioru {B, C, D, E, F}. W numerze rejestracyjnym litery mogą się powtarzać, ale cyfry nie. Ile można utworzyć różnych numerów rejestracyjnych, w których wystąpi co najmniej raz litera B?

Zadanie 90
Ile jest permutacji f zbioru ośmioelementowego, dla których f(5) = 1?

Zadanie 91
Dla dwóch permutacji

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 8 & 5 & 2 & 9 & 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) wyznacz ich złożenie f g
b) wyznacz permutacje odwrotne
c) rozłóż je na cykle i określ ich typ
d) wyznacz znak permutacji f g, sprawdź prawdziwość wzoru sgn(fg) = sgn(f) · sgn(g)

Zadanie 92
Wyznacz znak permutacji przy pomocy wzoru, wykorzystującego liczbę cyklów o długości parzystej:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 14 & 7 & 10 & 6 & 5 & 8 & 15 & 13 & 2 & 1 & 12 & 3 & 4 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

Zadanie 93
Na ile sposobów może 8 osób wysiąść na trzech piętrach z windy, jeżeli uwzględniamy kolejność wysiadania?

Zadanie 94
Do zdania egzaminu potrzeba więcej niż 50% punktów. Tworzymy dwie listy – tych osób, które zdały egzamin i tych, które nie zdały, w kolejności otrzymanych punktów. Wiedząc, że w grupie 10 studentów żaden wynik nie powtórzył się, oblicz ile jest możliwych rozmieszczeń tych 10 osób na dwóch listach.

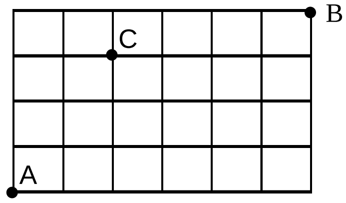
Zadanie 95
Oblicz ilość różnych harmonogramów wykonywania pięciu programów na trzech procesorach oraz ilość różnych harmonogramów wykonywania trzech programów na pięciu procesorach. Jeden program przyporządkowujemy tylko jednemu procesorowi. Za różne uważamy harmonogramy, w których inny jest przydział programów do procesorów lub inna jest kolejność ich wykonywania. Która z obliczonych liczb jest większa i ile razy?

Zadanie 96
Ile jest permutacji 10-elementowych, w których przy rozkładzie na cykle rozłączne wystąpi cykl 9-elementowy?

Zadanie 97
Oblicz ile wynosi współczynnik liczbowy przy wyrazie $x^2 y^5$ w rozwinięciu dwumianu $(x – 2y)^7$.

Zadanie 98
Na ile sposobów można wybrać z 20 osób 3 rozłączne zespoły liczące odpowiednio 3, 5 i 7 członków?

Zadanie 99
Ile jest najkrótszych dróg z punktu A do B na podanym planie miasta, które nie przechodzą przez punkt C?



Zadanie 100
Ile różnych liczb 7 cyfrowych można utworzyć, zapisując w dowolnej kolejności 7 cyfr: 8, 8, 8, 8, 5, 5, 2?

Zadanie 101
Wykaż tożsamość:

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} = 0 \qquad n \in \mathbf{N},\ n > 0$$

Zadanie 102
Ile jest rosnących ciągów czterocyfrowych o możliwych wartościach 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7?

Zadanie 103
Ile rozwiązań ma równanie: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, gdzie każda liczba x_i jest całkowita dodatnia?

Zadanie 104
Wyznacz liczbę nieujemnych rozwiązań całkowitoliczbowych dla równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ takich, że $x_1 \geq 2$ i $x_2 \geq 2$.

Zadanie 105
Z grupy kart zawierającej 3 piki, 4 trefle, 5 kar, 6 kierów losujemy:

a) 3 karty
b) 4 karty
c) 15 kart

Ile jest możliwych wyborów?
(2 wybory uważamy za różne, jeśli różnią się ilościami kart poszczególnych kolorów).

Zadanie 106
Iloma sposobami można rozmieścić 10 nierozróżnialnych kulek w pięciu rozróżnialnych torbach, jeśli chcemy żeby do każdej torby trafiła co najmniej jedna kulka?

Zadanie 107
Wyznacz liczbę rozwiązań całkowitoliczbowych równania: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, takich, że $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq x_3 \leq 1$, $x_4 \geq 0$.

Zadanie 108
Dla zbioru z powtórzeniami $x = < 4*a, 2*b, 5*c >$ rozważ podzbiory, w których każdy z elementów a, b, c występuje co najmniej raz, ale nie więcej niż trzy razy. Ile jest takich podzbiorów?

Zadanie 109
Z grupy kart zawierającej 4 asy, 4 króle, 4 damy i 3 walety wybieramy 4 karty. Ile jest możliwych wyborów? (Rozróżniamy tylko ilości poszczególnych figur).

Zadanie 110
Oblicz ilość rozwiązań całkowitoliczbowych nieujemnych równania $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$, zawierających tylko liczby parzyste (uwaga: 0 jest liczbą parzystą).

Zadanie 111
Z egzaminu można uzyskać oceny: 2, 3, 4, 5. Grupę 10 studentów dzielimy na cztery grupy według ocen z egzaminu. Wiedząc, że w każdej grupie znalazł się co najmniej jeden student, oblicz ile jest możliwych takich podziałów. Użyj odpowiedniej własności rekurencyjnej oraz następujących wartości:

$$\left\{ {9 \atop 3} \right\} = 3025 \quad \text{i} \quad \left\{ {9 \atop 4} \right\} = 7770.$$

Zadanie 112
Z grupy kart zawierającej 3 piki, 4 trefle, 5 kar, 6 kierów losujemy 3 karty. Ile jest możliwych wyborów? (2 wybory uważamy za różne jeśli różnią się ilościami kart poszczególnych kolorów).

Zadanie 113
Wyznacz liczbę rozwiązań całkowitoliczbowych równania: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$, takich, że $0 \leq x_1 \leq 1$, $0 \leq x_2 \leq 1$, $0 \leq x_3 \leq 1$, $x_4 \geq 0$.

Zadanie 114
Dla zbioru z powtórzeniami X = < 4*a, 3*b, 5*c > rozważ podzbiory, w których każdy z elementów a, b, c występuje co najmniej raz, ale nie więcej niż trzy razy.
Ile takich podzbiorów zawiera parzystą liczbę elementów?

Zadanie 115
Z grupy kart zawierającej 2 asy, 2 króle, 2 damy i 2 walety wybieramy 5 kart. Ile jest możliwych wyborów? Rozróżniamy tylko ilości poszczególnych figur.

Zadanie 116
Oblicz ilość rozwiązań całkowitoliczbowych nierówności: $x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$, takich że $x_1 > 1$, $x_2 < 2$, $2 < x_3 < 5$. Zbuduj funkcję tworzącą.

Zadanie 117
Na ile sposobów można rozmieścić 7 piłeczek w pięciu pudełkach, jeśli:

a) Pudełka są ponumerowane, ale piłeczki nierozróżnialne?
b) Pudełka i piłeczki są rozróżnialne, ale chcemy, żeby w każdym pudelku znalazła się co najmniej jedna piłeczka?