Wybrane zadania przygotowujące do egzaminu z ISO

dr Piotr Wąsiewicz

1. W języku logiki I rzędu czyli języku predykatów napisać:
   "Istnieje studentka, która kocha cały czas pewnego chłopaka."
   "Każda dziewczyna kocha się czasami w jakimś chłopaku."

   Rozwiązanie:
   $\exists x \forall t \exists y (studentka(x) \wedge chopak(y) \wedge czas(t) \wedge kocha(x, y, t))$
   $\forall x \exists t \exists y (dziewczyna(x) \wedge chopak(y) \wedge czas(t) \Rightarrow kocha(x, y, t))$

2. Omówić zasadę wnioskowania w przód i wstecz.

   Rozwiązanie:
   Podane jest w książce prof. J.J. Mulawki "Systemy Ekspertowe" WNT 1996.

3. Korzystając z teorii Dempstera-Shafera obliczyć rozkład prawdopodobieństwa dla połączenia dwóch rozkładów:
   $\{m(\{x_1, x_2, x_3\}) = \dfrac{2}{5}, m(\{x_1, x_3, x_4\}) = \dfrac{1}{5}, m(\{x_1, x_2, x_4\}) = \dfrac{2}{5}\}$ i
   $\{m(\{x_3, x_4\}) = \dfrac{1}{4}, m(\{x_1, x_4\}) = \dfrac{1}{4}, m(\{x_2\}) = \dfrac{1}{2}\}$
   oraz wartości funkcji przekonania Bel i wyobrażalności Pl dla wszystkich trzech rozkładów.

   Rozwiązanie:

$\{x_1, x_2, x_3\}$ $\frac{2}{5}$	$\{x_3\}$ $\frac{2}{20}$	$\{x_1\}$ $\frac{2}{20}$	$\{x_2\}$ $\frac{4}{20}$
$\{x_1, x_3, x_4\}$ $\frac{1}{5}$	$\{x_3, x_4\}$ $\frac{1}{20}$	$\{x_1, x_4\}$ $\frac{1}{20}$	ϕ $\frac{2}{20}$
$\{x_1, x_2, x_4\}$ $\frac{2}{5}$	$\{x_4\}$ $\frac{2}{20}$	$\{x_1, x_4\}$ $\frac{2}{20}$	$\{x_2\}$ $\frac{4}{20}$
0	$\{x_3, x_4\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_1, x_4\}$ $\frac{1}{4}$	$\{x_2\}$ $\frac{1}{2}$

$$\sum_{A \cap B = \phi} m_1(A) m_2(B) = \frac{2}{20}; \;\; (m_1 \oplus m_2)(\{x_2\}) = \frac{\frac{4}{20} + \frac{4}{20}}{1 - \frac{2}{20}} = \frac{\frac{8}{20}}{\frac{18}{20}} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9};$$

$$(m_1 \oplus m_2)(\{x_1, x_4\}) = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{18}{20}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}; \;\; (m_1 \oplus m_2)(\{x_3, x_4\}) = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{18}{20}} = \frac{1}{18};$$

$$m(\{x_1\}) = \frac{\frac{2}{20}}{\frac{18}{20}} = \frac{1}{9}; \; m(\{x_3\}) = \frac{\frac{2}{20}}{\frac{18}{20}} = \frac{1}{9}; \; m(\{x_4\}) = \frac{\frac{2}{20}}{\frac{18}{20}} = \frac{1}{9};$$

Dla pierwszego rozkładu:
$Bel(\{x_1, x_2, x_3\}) = \frac{2}{5}$; $Bel(\{x_1, x_3, x_4\}) = \frac{1}{5}$; $Bel(\{x_1, x_2, x_4\}) = \frac{2}{5}$;
$Pl(\{x_1, x_2, x_3\}) = 1$; $Pl(\{x_1, x_3, x_4\}) = 1$; $Pl(\{x_1, x_2, x_4\}) = 1$;
Dla drugiego rozkładu:
$Bel(\{x_3, x_4\}) = \frac{1}{4}$; $Bel(\{x_1, x_4\}) = \frac{1}{4}$; $Bel(\{x_2\}) = \frac{1}{2}$;
$Pl(\{x_3, x_4\}) = m(\{x_3, x_4\}) + m(\{x_1, x_4\}) = \frac{1}{2}$; $Pl(\{x_1, x_4\}) = \frac{1}{2}$; $Pl(\{x_2\}) = \frac{1}{2}$;

Dla trzeciego policzonego rozkładu:
$Bel(\{x_2\}) = \frac{4}{9}$; $Bel(\{x_1, x_4\}) = m(\{x_1\}) + m(\{x_4\}) + m(\{x_1, x_4\}) = \frac{7}{18}$;
$Bel(\{x_3, x_4\}) = m(\{x_3\}) + m(\{x_4\}) + m(\{x_3, x_4\}) = \frac{5}{18}$; $Bel(\{x_1\}) = \frac{1}{9}$;
$Bel(\{x_3\}) = \frac{1}{9}$; $Bel(\{x_4\}) = \frac{1}{9}$;
$Pl(\{x_2\}) = \frac{4}{9}$; $Pl(\{x_1, x_4\}) = \frac{4}{9}$; $Pl(\{x_3, x_4\}) = \frac{4}{9}$;
$Pl(\{x_3\}) = m(\{x_3\}) + m(\{x_3, x_4\}) = \frac{1}{6}$; $Pl(\{x_1\}) = m(\{x_1\}) + m(\{x_1, x_4\}) = \frac{5}{18}$;
$Pl(\{x_4\}) = m(\{x_4\}) + m(\{x_1, x_4\}) + m(\{x_3, x_4\}) = \frac{1}{3}$;

4. Z danej tablicy warunkowo-działaniowej podanej poniżej wyprowadzić bazę reguł o postaci (atrybut$_1$, wartość)$\wedge$(atrybut$_2$, wartość)=(atrybut działaniowy, wartość). Wypisać wszystkie (razem 11) relacje nierozróżnialności pomiędzy poszczególnymi x_i dla $i \in \{1..6\}$ np. $x_1 \underset{\{z\}}{\sim} x_2$ i podać wszystkie klasyfikacje określone przez relacje nierozróżnialności np. $\{z\}^* = \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_6\}, \{x_3, x_4\}\}$. Następnie podać, które zbiory atrybutów są zależne od innych i wyznaczyć dla $\mathcal{Z} = \{z\}^*$, $P = \{x, y\}$ aproksymację dolną $\underline{P}\mathcal{Z}$ oraz aproksymację górną $\overline{P}\mathcal{Z}$ oraz wyprowadzić reguły pewne.

	Atrybuty warunkowe		Atrybut działaniowy
	x	y	z
x_1	P	F	0
x_2	N	T	0
x_3	N	T	1
x_4	P	F	1
x_5	N	F	0
x_6	N	T	2

Rozwiązanie:
$x_1, x_4 : (x, P) \wedge (y, F) = (z, 0) \vee (z, 1)$
$x_2, x_5 : (x, N) = (z, 0)$
$x_3, x_6 : (x, N) \wedge (y, T) = (z, 1) \vee (z, 2)$
Tablica (symetryczna) wszystkich relacji nierozróżnialności postaci np.: $x_1 \underset{\{z\}}{\sim} x_2 = x_2 \underset{\{z\}}{\sim} x_1$, $x_2 \underset{\{x,z\}}{\sim} x_5 = x_5 \underset{\{x,z\}}{\sim} x_2$ jest przedstawiona poniżej.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_6	$\{\phi\}$	$\{x, y\}$	$\{x, y\}$	$\{\phi\}$	$\{x\}$
x_5	$\{y, z\}$	$\{x, z\}$	$\{x\}$	$\{y\}$	
x_4	$\{x, y\}$	$\{\phi\}$	$\{z\}$		
x_3	$\{\phi\}$	$\{x, y\}$			
x_2	$\{z\}$				

$\mathcal{Z} = \{z\}^* = \{\{x_1, x_2, x_5\}, \{x_3, x_4\}, \{x_6\}\}$
$P^* = \{x, y\}^* = \{\{x_1, x_4\}, \{x_2, x_3, x_6\}, \{x_5\}\}$
$\underline{P}\mathcal{Z} = \{x_5\}$
$\overline{P}\mathcal{Z} = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_6\}, \{x_2, x_3, x_6\}\}$
Reguły pewne z $\underline{P}\mathcal{Z}$:
$x_5 : (x, N) \wedge (y, F) = (z, 0)$
Reguły możliwe to dopełnienie reguł pewnych do pełnego ich zbioru:
$x_1, x_4 : (x, P) \wedge (y, F) = (z, 0) \vee (z, 1)$
$x_2 : (x, N) \wedge (y, T) = (z, 0)$

$x_3 : (x, N) \wedge (y, T) = (z, 1)$

5. Dla podanych dalej relacji rozmytych podać trzy kompozycje (złożenia) $\mu_1 \cdot \mu_2$, $\mu_2 \cdot \mu_2^T$ oraz $\mu_2^T \cdot \mu_2$.

$\mu_1 =$

	w
a	0.03
b	0.98
c	0.63
d	0.32

, $\mu_2 =$

	z	x	y	v
a	0.32	0.85	0.45	0.21
b	0.09	0.75	0.34	0.23
c	0.21	0.23	0.12	0.34
d	0.10	0.54	0.76	0.89

Rozwiązanie:

$\mu_1 \circ \mu_2(z) = \max_{u_1}(\min(\mu_1(u_1), \mu_2(u_1, z)) =$
$= \max(\min(\mu_1(a), \mu_2(a, z)), \min(\mu_1(b), \mu_2(b, z)), \min(\mu_1(c), \mu_2(c, z)),$
$\min(\mu_1(d), \mu_2(d, z))) =$
$= \max(\min(0.03, 0.32), \min(0.98, 0.09), \min(0.69, 0.21), \min(0.32, 0.10)) =$
$= \max(0.03, 0.09, 0.21, 0.10) = 0.21$
$\mu_1 \circ \mu_2(x) = \max(0.03, 0.75, 0.23, 0.32) = 0.75$
$\mu_1 \circ \mu_2(y) = \max(0.03, 0.34, 0.12, 0.32) = 0.34$
$\mu_1 \circ \mu_2(v) = \max(0.03, 0.23, 0.34, 0.32) = 0.34$
$\mu_2 \circ \mu_2^T(a, b) = \max_{u_2}(\min(\mu_1(a, u_2), \mu_2(u_2, b)) =$
$= \max(\min(0.32, 0.09), \min(0.85, 0.75), \min(0.45, 0.34), \min(0.21, 0.23)) =$
$= \max(0.09, 0.75, 0.34, 0.21) = 0.75$
$\mu_2 \circ \mu_2^T(a, c) = \mu_2 \circ \mu_2^T(c, a) = \max(0.21, 0.23, 0.12, 0.21) = 0.23$
$\mu_2 \circ \mu_2^T(a, d) = \mu_2 \circ \mu_2^T(d, a) = \max(0.10, 0.54, 0.45, 0.21) = 0.54$
$\mu_2 \circ \mu_2^T(b, c) = \mu_2 \circ \mu_2^T(c, b) = \max(0.09, 0.23, 0.12, 0.23) = 0.23$
$\mu_2 \circ \mu_2^T(b, d) = \mu_2 \circ \mu_2^T(d, b) = \max(0.09, 0.54, 0.34, 0.23) = 0.54$
$\mu_2 \circ \mu_2^T(c, d) = \mu_2 \circ \mu_2^T(d, c) = \max(0.10, 0.23, 0.12, 0.34) = 0.34$
$\mu_2^T \circ \mu_2(z, x) = \mu_2^T \circ \mu_2(x, z) = \max(0.32, 0.09, 0.21, 0.10) = 0.32$
$\mu_2^T \circ \mu_2(z, y) = \mu_2^T \circ \mu_2(y, z) = \max(0.32, 0.09, 0.12, 0.10) = 0.32$
$\mu_2^T \circ \mu_2(z, v) = \mu_2^T \circ \mu_2(v, z) = \max(0.21, 0.09, 0.21, 0.10) = 0.21$
$\mu_2^T \circ \mu_2(x, y) = \mu_2^T \circ \mu_2(y, x) = \max(0.45, 0.34, 0.12, 0.54) = 0.54$
$\mu_2^T \circ \mu_2(x, v) = \mu_2^T \circ \mu_2(v, x) = \max(0.21, 0.23, 0.23, 0.54) = 0.54$
$\mu_2^T \circ \mu_2(y, v) = \mu_2^T \circ \mu_2(v, y) = \max(0.21, 0.23, 0.12, 0.76) = 0.76$

$\mu_2 \circ \mu_2^T =$

	a	b	c	d
a	0.85	0.75	0.23	0.54
b	0.75	0.75	0.23	0.54
c	0.23	0.23	0.34	0.34
d	0.54	0.54	0.34	0.89

$\mu_2^T \circ \mu_2 =$

	z	x	y	v
z	0.32	0.32	0.32	0.21
x	0.32	0.85	0.54	0.54
y	0.32	0.54	0.76	0.76
v	0.21	0.54	0.76	0.89

6. Omówić budowę i zasadę konstruowania systemów ekspertowych.
Rozwiązanie:
Podane jest w książce prof. J.J. Mulawki "Systemy Ekspertowe" WNT 1996.