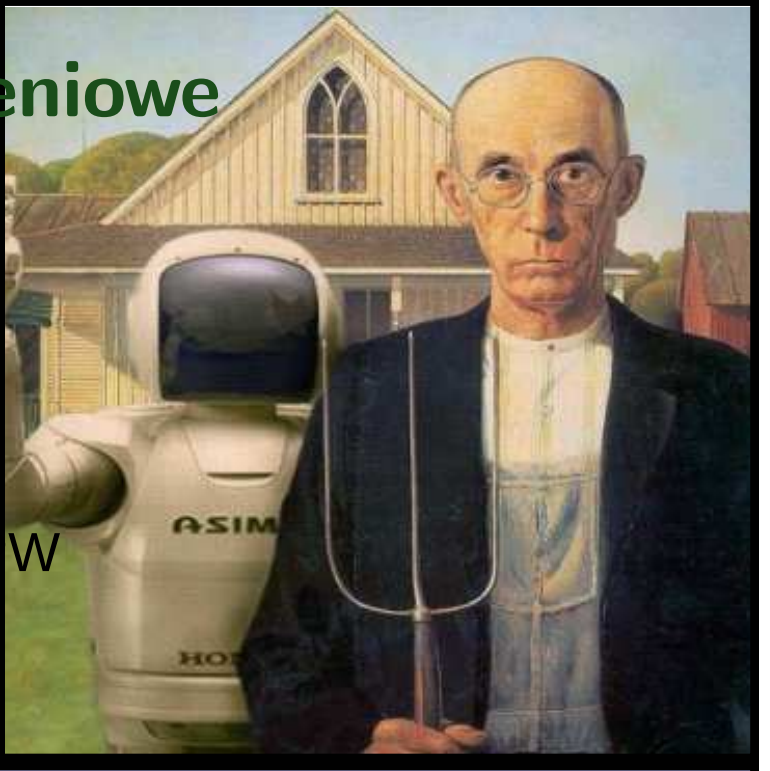
Inteligentne Systemy Obliczeniowe

Wykład 5

Piotr Wąsiewicz

Zakład Sztucznej Inteligencji - ISE PW

pwasiewi@elka.pw.edu.pl



Konstrukcja drzew etykietujących

Zstępujące konstruowanie drzewa

funkcja *buduj-drzewo*(P, d, S)
argumenty wejściowe:

- P - zbiór przykładów etykietowanych pojęcia c,
- d - domyślna etykieta kategorii,
- S - zbiór możliwych testów;

zwraca: drzewo decyzyjne jako hipotezę przybliżającą c na zbiorze P;

jeśli *kryterium-stopu* (P, S) to
utwórz liść l;
d_l:=*kategoria* (P, d);
zwróć l;
koniec jeśli
utwórz węzeł n;
t_n:=*wybierz-test* (P, S);
d:=*kategoria* (P, d);
dla wszystkich $r \in R_{t_n}$ wykonaj
$n[r]$:=*buduj-drzewo* $(P_{t_n,r}, d, S - \{t_n\})$;
koniec dla
zwróć n

Kryterium stopu i wyboru kategorii

Kryterium stopu przyjmuje następującą postać:

$$P = \phi \vee S = \phi \vee |\{d' \in C | (\exists x \in P) \quad c(x) = d'\}| = 1$$

Operacja *wyboru kategorii* liścia natomiast taką:

$$\textit{kategoria}\ (P, d) == \begin{cases} d & \text{jeśli } P = \phi, \\ \text{argmax}_{d'} |P^{d'}| & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Wybór testu dla największego przyrostu informacji

Wybór testu tworzącego węzeł lub liść zależy od przyrostu informacji $v_t(P)$ dla danego zbioru P i atrybutu t.

Informację zawartą w zbiorze etykietowanych przykładów P można wyrazić następująco:

$$I(P) = \sum_{d \in C} -\frac{|P^d|}{|P|} log \frac{|P^d|}{|P|}$$

Z kolei *entropię* zbioru przykładów P ze względu na wynik r testu t określa się jako:

$$E_{tr}(P) = \sum_{d \in C} -\frac{|P^d_{tr}|}{|P_{tr}|} log \frac{|P^d_{tr}|}{|P_{tr}|}$$

$$E_t(P) = \sum_{r \in R_t} \frac{|P_{tr}|}{|P|} E_{tr}(P)$$

Przyrost informacji wynikający z zastosowania testu t do zbioru przykładów etykietowanych P jest określony jako różnica:

$$g_t(P) = I(P) - E_t(P)$$

Jeśli *przyrost informacji* podzielimy przez *wartość informacyjną* $IV_t(P)$ testu t dla zbioru przykładów P, to otrzymamy *współczynnik przyrostu informacji* zdefiniowany jako:

$$v_t(P) = \frac{g_t(P)}{IV_t(P)}, \text{ gdzie } IV_t(P) = \sum_{r \in R_t} -\frac{|P_{tr}|}{|P|} log \frac{|P_{tr}|}{|P|}$$

Zbiór trenujący T

x	aura	temperatura	wilgotność	wiatr	$c(x)$
1	słoneczna	ciepła	duża	słaby	0
2	słoneczna	ciepła	duża	silny	0
3	pochmurna	ciepła	duża	słaby	1
4	deszczowa	umiarkowana	duża	słaby	1
5	deszczowa	zimna	normalna	słaby	1
6	deszczowa	zimna	normalna	silny	0
7	pochmurna	zimna	normalna	silny	1
8	słoneczna	umiarkowana	duża	słaby	0
9	słoneczna	zimna	normalna	słaby	1
10	deszczowa	umiarkowana	normalna	słaby	1
11	słoneczna	umiarkowana	normalna	silny	1
12	pochmurna	umiarkowana	duża	silny	1
13	pochmurna	ciepła	normalna	słaby	1
14	deszczowa	umiarkowana	duża	silny	0

Współczynnik informacji

Obliczenia *współczynnika przyrostu informacji* dla testu tożsamościowego na wartościach atrybutu wilgotność.

$$|T^1| = |\{3,4,5,7,9,10,11,12,13\}| = 9$$

$$|T^0| = |\{1,2,6,8,14\}| = 5$$

$$|T_{\text{wilgotność,normalna}}| = |\{5,6,7,9,10,11,13\}| = 7 \qquad (1)$$

$$|T^1_{\text{wilgotność,normalna}}| = |\{5,7,9,10,11,13\}| = 6 \quad , \quad |T^0_{\text{wilgotność,normalna}}| = |\{6\}| = 1$$

$$|T_{\text{wilgotność,duza}}| = |\{1,2,3,4,8,12,14\}| = 7 \qquad (2)$$

$$|T^1_{\text{wilgotność,duż‘}}| = |\{3,4,12\}| = 3 \quad , \quad |T^0_{\text{wilgotność,duża}}| = |\{1,2,8,14\}| = 4$$

$$E_{\text{wilgotność,normalna}}(P) = -\frac{6}{7}\log_2\frac{6}{7} - \frac{1}{7}\log_2\frac{1}{7} = 0,592$$

$$E_{\text{wilgotność,duża}}(P) = -\frac{3}{7}\log_2\frac{3}{7} - \frac{4}{7}\log_2\frac{4}{7} = 0,985$$

$$I(T) = -\frac{9}{14}\log_2\frac{9}{14} - \frac{5}{14}\log_2\frac{5}{14} = 0,940$$

$$E_{\text{wilgotność}}(T) = \frac{7}{14} * 0,592 + \frac{7}{14} * 0,982 = 0,788$$

$$g_{\text{wilgotność}}(T) = I(T) - E_{\text{wilgotność}}(T) = 0,152$$

$$IV_{\text{wilgotność}}(T) = -\frac{7}{14}\log_2\frac{7}{14} - \frac{7}{14}\log_2\frac{7}{14} = 1$$

$$v_{\text{wilgotność}}(T) = \frac{g_{\text{wilgotność}}(T)}{IV_{\text{wilgotność}}(T)} = \frac{0,152}{1} = 0,152$$

Współczynnik przyrostu informacji

Obliczenia *współczynnika przyrostu informacji* dla testu tożsamościowego na wartościach atrybutu aura.

$$
\begin{aligned}
|T^1| &= |\{3,4,5,7,9,10,11,12,13\}| = 9 \\
|T^0| &= |\{1,2,6,8,14\}| = 5 \\
|T_{\text{aura, słoneczna}}| &= |\{1,2,8,9,11\}| = 5 \qquad (3) \\
|T^1_{\text{aura, słoneczna}}| = |\{9,11\}| = 2 &\quad , \quad |T^0_{\text{aura, słoneczna}}| = |\{1,2,8\}| = 3 \\
|T_{\text{aura, pochmurna}}| &= |\{3,7,12,13\}| = 4 \qquad (4) \\
|T^1_{\text{aura, pochmurna}}| = |\{3,7,12,13\}| = 4 &\quad , \quad |T^0_{\text{aura, pochmurna}}| = |\{\phi\}| = 0 \\
|T_{\text{aura, deszczowa}}| &= |\{4,5,6,10,14\}| = 5 \qquad (5) \\
|T^1_{\text{aura, deszczowa}}| &= |\{4,5,10\}| = 3 \\
|T^0_{\text{aura, deszczowa}}| &= |\{6,14\}| = 2 \\
E_{\text{aura,słoneczna}}(P) &= -\frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} - \frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} = 0,971 \\
E_{\text{aura,pochmurna}}(P) &= -\frac{4}{4}\log_2\frac{4}{4} - \frac{0}{4}\log_2\frac{0}{4} = 0 \\
E_{\text{aura,deszczowa}}(P) &= -\frac{3}{5}\log_2\frac{3}{5} - \frac{2}{5}\log_2\frac{2}{5} = 0,971 \\
E_{\text{aura}}(T) &= \frac{5}{14} * 0,971 + \frac{4}{14} * 0 + \frac{5}{14} * 0,971 = 0,694 \\
g_{\text{aura}}(T) &= I(T) - E_{\text{aura}}(T) = 0,940 - 0,694 = 0,246
\end{aligned}
$$

$$
IV_{\text{aura}}(T) = -2\frac{5}{14}\log_2\frac{5}{14} - \frac{4}{14}\log_2\frac{4}{14} = 1,577 \qquad v_{\text{aura}}(T) = \frac{g_{\text{aura}}(T)}{IV_{\text{aura}}(T)} = \frac{0,246}{1,577} = 0,156
$$

Współczynnik przyrostu informacji

Obliczenia *współczynnika przyrostu informacji* dla testu tożsamościowego na wartościach atrybutu temperatura.

$$|T^1| = |\{3,4,5,7,9,10,11,12,13\}| = 9$$

$$|T^0| = |\{1,2,6,8,14\}| = 5$$

$$|T_{\text{temp, ciepła}}| = |\{1,2,3,13\}| = 4 \tag{6}$$

$$|T^1_{\text{temp, ciepła}}| = |\{3,13\}| = 2 \quad , \quad |T^0_{\text{temp, ciepła}}| = |\{1,2\}| = 2$$

$$|T_{\text{temp, umiarkowana}}| = |\{4,8,10,11,12,14\}| = 6 \tag{7}$$

$$|T^1_{\text{temp, umiarkowana}}| = |\{4,10,11,12\}| = 4 \quad , \quad |T^0_{\text{temp, umiarkowana}}| = |\{8,14\}| = 2$$

$$|T_{\text{temp, zimna}}| = |\{5,6,7,9\}| = 4 \tag{8}$$

$$|T^1_{\text{temp, zimna}}| = |\{5,7,9\}| = 3$$

$$|T^0_{\text{temp, zimna}}| = |\{6\}| = 1$$

$$E_{\text{temp, ciepła}}(P) = -\frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} - \frac{2}{4}\log_2\frac{2}{4} = 1$$

$$E_{\text{temp, umiarkowana}}(P) = -\frac{4}{6}\log_2\frac{4}{6} - \frac{2}{6}\log_2\frac{2}{6} = 0,918$$

$$E_{\text{temp, zimna}}(P) = -\frac{3}{4}\log_2\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} = 0,811$$

$$E_{\text{temp}}(T) = \frac{4}{14} * 1 + \frac{6}{14} * 0,918 + \frac{4}{14} * 0,811 = 0,911$$

$$g_{\text{temp}}(T) = I(T) - E_{\text{temp}}(T) = 0,940 - 0,911 = 0,029$$

$$IV_{\text{temp}}(T) = -2\frac{4}{14}\log_2\frac{4}{14} - \frac{6}{14}\log_2\frac{6}{14} = 1,557$$

$$v_{\text{temp}}(T) = \frac{g_{\text{temp}}(T)}{IV_{\text{temp}}(T)} = \frac{0,029}{1,557} = 0,019$$

Współczynnik przyrostu informacji

Obliczenia *współczynnika przyrostu informacji* dla testu tożsamościowego na wartościach atrybutu wiatr.

$$
\begin{aligned}
|T^1| &= |\{3,4,5,7,9,10,11,12,13\}| = 9 \\
|T^0| &= |\{1,2,6,8,14\}| = 5 \\
|T_{\text{wiatr,słaby}}| &= |\{1,3,4,5,8,9,10,13\}| = 8 \qquad (9)
\end{aligned}
$$

$$
|T^1_{\text{wiatr,słaby}}| = |\{3,4,5,9,10,13\}| = 6 \quad , \quad |T^0_{\text{wiatr,słaby}}| = |\{1,8\}| = 2
$$

$$
\begin{aligned}
|T_{\text{wiatr,silny}}| &= |\{2,6,7,11,12,14\}| = 6 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

$$
|T^1_{\text{wiatr,silny}}| = |\{7,11,12\}| = 3 \quad , \quad |T^0_{\text{wiatr,silny}}| = |\{2,6,14\}| = 3
$$

$$
\begin{aligned}
E_{\text{wiatr,słaby}}(P) &= -\frac{6}{8}\log_2\frac{6}{8} - \frac{2}{8}\log_2\frac{2}{8} = 0,811 \\
E_{\text{wiatr,silny}}(P) &= -\frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} - \frac{3}{6}\log_2\frac{3}{6} = 1 \\
E_{\text{wiatr}}(T) &= \frac{8}{14} * 0,811 + \frac{6}{14} * 1 = 0,892 \\
g_{\text{wiatr}}(T) &= I(T) - E_{\text{wiatr}}(T) = 0,940 - 0,892 = 0,048 \\
IV_{\text{wiatr}}(T) &= -\frac{8}{14}\log_2\frac{8}{14} - \frac{6}{14}\log_2\frac{6}{14} = 0,985 \\
v_{\text{wiatr}}(T) &= \frac{g_{\text{wiatr}}(T)}{IV_{\text{wiatr}}(T)} = \frac{0,048}{0.985} = 0,049
\end{aligned}
$$

Kolejne kroki konstrukcji drzewa

1. Pierwsze wywołanie funkcji:
   buduj-drzewo (T,1,{*aura*,*temperatura*,*wilgotność*,*wiatr* }).
2. Kryterium stopu dla zbioru $P = T$ nie jest spełnione.
3. Tworzony jest nowy węzeł, dla którego na podstawie obliczonych wcześniej współczynników przyrostu informacji wybierany jest test tożsamościowy atrybutu *aura* o największym współczynniku.
4. Większościową etykietą w zbiorze P jest 1 i dalej jest przekazywana jako etykieta.
5. Następuje wywołanie rekurencyjne dla wyniku *słoneczna* testu *aura* :
   - *buduj-drzewo* (P,1,{*temperatura*,*wilgotność*,*wiatr* }), gdzie $P = \{1, 2, 8, 9, 11\}$ i nie jest spełnione kryterium stopu.
   - Tworzony jest nowy węzeł dla którego wybierany jest test o najmniejszej entropii (w przypadku wątpliwości o największym współczynniku przyrostu informacji) tzn.: atrybut *wilgotność* :

$$E_{\text{temp,zimna}}(P) = -\frac{1}{1}\log_2\frac{1}{1} - \frac{0}{1}\log_2\frac{0}{1} = 0$$

$$E_{\text{temp,ciepła}}(P) = -\frac{0}{2}\log_2\frac{0}{2} - \frac{0}{2}\log_2\frac{0}{2} = 0$$

$$E_{\text{wilg,duża}}(P) = -\frac{0}{3}\log_2\frac{0}{3} - \frac{3}{3}\log_2\frac{3}{3} = 0$$

$$E_{\text{wiatr,silny}}(P) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1$$

$$E_{\text{temp,umiarkowana}}(P) = -\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} = 1$$

$$E_{\text{wilg,normalna}}(P) = -\frac{2}{2}\log_2\frac{2}{2} - \frac{0}{2}\log_2\frac{0}{2} = 0$$

$$E_{\text{wiatr,słaby}}(P) = -\frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\log_2\frac{2}{3} = 0,918$$

$$E_{\text{temp}}(T) = 0,4;\ E_{\text{wilgotność}}(T) = 0;\ E_{\text{wiatr}}(T) = 0,951$$

Kolejne kroki konstrukcji drzewa c.d

3. Ciąg dalszy rekurencyjnego wykonania głównej funkcji dla wyniku *słoneczna* testu *aura* czyli punktu 5:
   - Większościową etykietą kategorii w zbiorze P jest 0 i będzie ona przekazana dalej.
   - Dla wyniku *normalna* testu *wilgotność* następuje wykonanie rekurencyjne: *buduj-drzewo* (P,0,{*temperatura,wiatr* }), gdzie $P = \{9, 11\}$ i jest spełnione kryterium stopu, gdyż zbiór P ma jedną etykietę 1. Jest tworzony liść z etykietą 1 i zwracany jako wynik funkcji.
   - Dla wyniku *duża* testu *wilgotność* następuje wykonanie rekurencyjne: *buduj-drzewo* (P,0,{*temperatura,wiatr* }), gdzie $P = \{1, 2, 8\}$ i jest spełnione kryterium stopu, gdyż zbiór P ma jedną etykietę 0. Jest tworzony liść z etykietą 0 i zwracany jako wynik funkcji.
   - Zwracany jest jako wynik węzeł z testem *wilgotność* .
- Następuje wywołanie rekurencyjne dla wyniku *pochmurna* testu *aura* dla $P = \{3, 7, 12, 13\}$ w wyniku czego powstaje liść z etykietą 1.
- Następuje wywołanie rekurencyjne dla wyniku *deszczowa* testu *aura* dla $P = \{4, 5, 6, 10, 14\}$ w wyniku czego powstaje węzeł w testem *wiatr* , a następnie po dwóch rekurencyjnych wywołaniach powstają liście z etykietą 1 dla wyniku *słaby* przy czym $P = \{4, 5, 10\}$ oraz z etykietą 0 dla wyniku *silny* przy czym $P = \{6, 14\}$.

Skonstruowane drzewo decyzyjne

aura=słoneczna:		$P = \{1, 2, 8, 9, 11\}$
	wilgotność=normalna:= 1	dla $P = \{9, 11\}$
	wilgotność=duża:= 0	dla $P = \{1, 2, 8\}$
aura=pochmurna: 1		dla $P = \{3, 7, 12, 13\}$
aura=deszczowa:		$P = \{4, 5, 6, 10, 14\}$
	wiatr=słaby:= 1	dla $P = \{4, 5, 10\}$
	wiatr=silny:= 0	dla $P = \{6, 14\}$