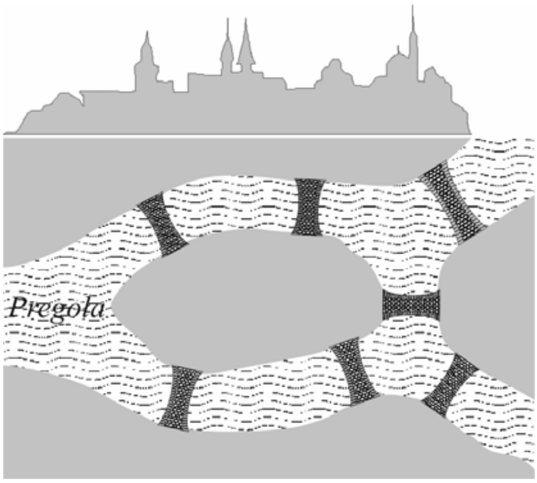
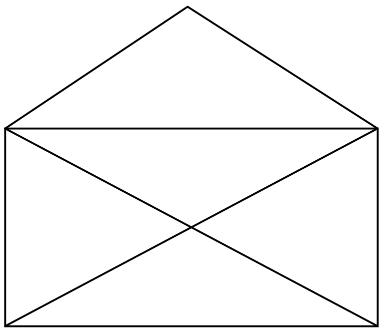
DROGI i CYKLE EULERA w grafach



Czy istnieje zamknięta droga spaceru przechodząca przez wszystkie mosty w Królewcu dokładnie jeden raz?



Czy można narysować podaną figurę nie odrywając ołówka od papieru i nie rysując dwukrotnie żadnego odcinka?

Drogą Eulera w grafie (skierowanym) nazywamy taką drogę prostą, która zawiera wszystkie krawędzie (łuki) grafu.

Cyklem Eulera nazywamy zamkniętą drogę Eulera.

Graf, który ma cykl Eulera nazywamy ***grafem eulerowskim***, a taki, który ma drogę Eulera nazywamy ***grafem półeulerowskim***.

Twierdzenie (Euler, 1736)

Spójny graf G (nieskierowany) ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy stopień każdego wierzchołka w G jest parzysty.

Leonhard Euler (1707 – 1783)

Dowód

($\Rightarrow$) Załóżmy, że graf ma cykl Eulera. Jeśli będziemy przechodzili wzdłuż krawędzi tego cyklu, usuwając je po przejściu, to w każdym przechodzonym wierzchołku stopień będzie malał o 2. Ponieważ ten cykl zawiera wszystkie krawędzie grafu dokładnie raz, to po przejściu całego cyklu wszystkie wierzchołki będą stopnia 0. Zatem na początku wszystkie musiały mieć stopień parzysty.

($\Leftarrow$) *Indukcja względem liczby krawędzi m.*

Dla $m = 3$ twierdzenie oczywiście zachodzi.

Rozważmy graf o $m > 3$, zakładając, że każdy graf o mniejszej liczbie krawędzi ma cykl Eulera.

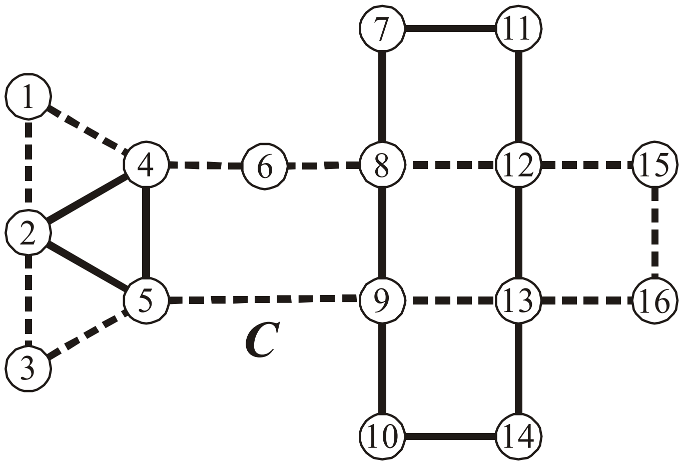
Ze spójności grafu i parzystości stopni wierzchołków wynika, że minimalny stopień wierzchołka jest równy 2. Zatem graf musi zawierać cykl elementarny o długości co najmniej 3 (tw. Diraca). Wybierzmy taki cykl i oznaczmy go przez *C*. Jeśli cykl *C* zawiera każdą krawędź grafu, to dowód jest zakończony.

Jeśli nie, to usuwamy z grafu krawędzie należące do cyklu *C*. Powstaje podgraf *H*, który ma mniej krawędzi niż graf *G* (może nie być spójny), ale nadal każdy wierzchołek ma w nim stopień parzysty (po usunięciu cyklu *C* stopień zmniejsza się o 0 lub 2). Na mocy założenie indukcyjnego w każdej składowej spójnej podgrafu *H* istnieje cykl Eulera. Ponadto ze spójności grafu *G* wynika, że każda składowa podgrafu *H* ma wierzchołek wspólny z cyklem *C*.

Zatem cykl Eulera w grafie *G* można skonstruować przechodząc kolejne krawędzie cyklu *C* w ustalonym kierunku od wybranego wierzchołka początkowego i włączając do drogi cykle Eulera w napotkanych składowych spójnych podgrafu *H*. W każdym wierzchołku, który nie jest w *H* wierzchołkiem izolowanym, przechodzimy krawędzie cyklu Eulera w tej składowej podgrafu *H*, która zawiera ten wierzchołek. Po obejściu cyklu Eulera w składowej podgrafu *H* kontynuujemy poruszanie się wzdłuż cyklu *C* i wracamy na końcu do wierzchołka początkowego. Obchodzimy w ten sposób dokładnie jeden raz wszystkie krawędzie grafu *G*.

■

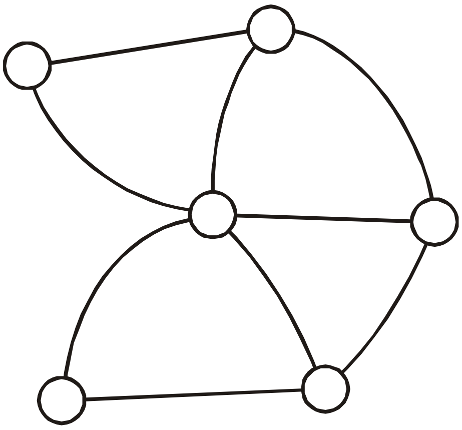
Przykład rekurencyjnego wyznaczania cyklu Eulera



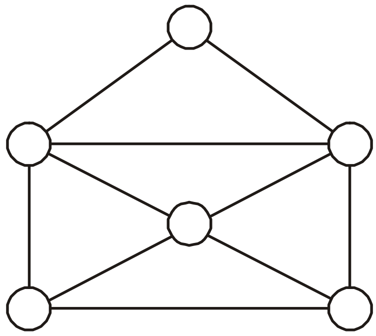
Wniosek (z tw. Eulera)

Graf spójny, który ma nie więcej niż dwa wierzchołki stopnia nieparzystego, ma drogę Eulera.

Grafy reprezentujące przykładowe problemy („spacer” i ‘koperta”)

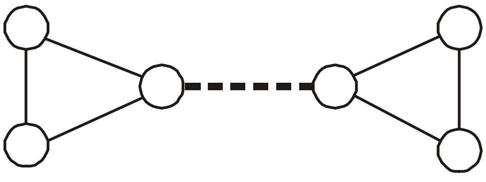


nie ma drogi Eulera



jest droga E., ale nie ma cyklu

Mostem nazywamy taką krawędź grafu, której usunięcie zwiększa liczbę składowych spójnych tego grafu.

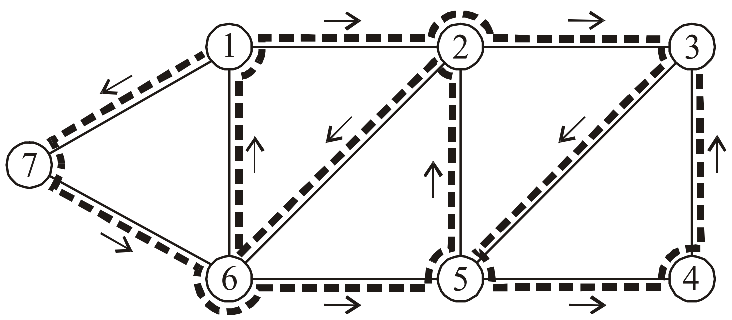


Prosty algorytm wyznaczania drogi Eulera (tzw. *alg. Fleury'ego*)

Budujemy iteracyjnie ciąg krawędzi grafu (drogę).

1. Wybierz dowolny wierzchołek $\boldsymbol{v_0}$ o nieparzystym stopniu, o ile taki istnieje; w przeciwnym przypadku wybierz dowolny wierzchołek $\boldsymbol{v_0}$; podstaw $\boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{v_0}$;
2. Dopóki są w grafie krawędzie incydentne z $\boldsymbol{v}$ wykonuj:
   2.1. Jeśli jest dokładnie jedna krawędź incydentna z $\boldsymbol{v}$: $\{v, w\}$, to ją wybierz;
   2.2. Jeśli istnieje więcej niż jedna krawędź incydentna z v, to wybierz dowolną krawędź incydentną $\{v, w\}$, która nie jest mostem;
   2.3. wstaw wybraną krawędź jako kolejny wyraz ciągu i usuń ją z grafu; podstaw $\boldsymbol{v} \leftarrow \boldsymbol{w}$;
3. Jeśli ciąg zawiera wszystkie krawędzie grafu, to została wyznaczona w nim droga lub cykl Eulera, a jeśli nie, to graf nie był spójny i algorytm wyznaczył drogę lub cykl Eulera w jego składowej spójnej, która zawiera wybrany początkowo wierzchołek $\boldsymbol{v_0}$.

Przykład działania algorytmu Fleury'ego



DROGI i CYKLE EULERA w grafach skierowanych

Twierdzenie

Spójny graf skierowany ma cykl Eulera wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego wierzchołka v zachodzi $d^+(v) = d^-(v)$.

Wniosek

Spójny graf skierowany ma drogę Eulera, gdy dla każdego wierzchołka v zachodzi $d^+(v) = d^-(v)$, albo gdy istnieją dokładnie dwa wierzchołki v_1 i v_2 nie spełniające tego warunku, dla których zachodzi $d^+(v_1) - d^-(v_1) = d^-(v_2) - d^+(v_2) = 1$.

DROGI i CYKLE HAMILTONA w grafach

Rozważmy graf (nieskierowany) $G = (V, E)$

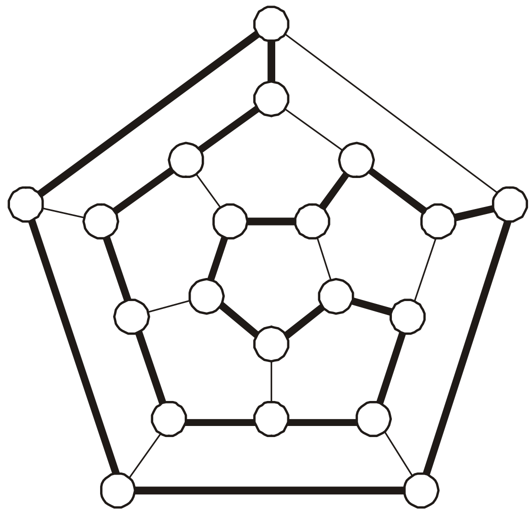
Drogą Hamiltona w grafie G nazywamy taką drogę elementarną, która zawiera wszystkie wierzchołki grafu.

Cyklem Hamiltona w grafie G nazywamy taki cykl elementarny, który zawiera wszystkie wierzchołki grafu (jest zamkniętą drogą Hamiltona).

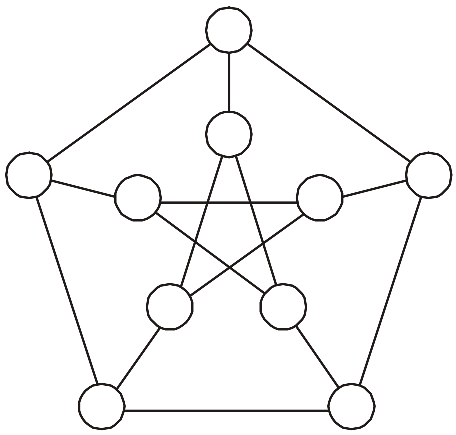
Długość cyklu Hamiltona jest równa $| V |$.

Graf, który ma cykl Hamiltona nazywamy ***grafem hamiltonowskim***, a taki, który ma drogę Hamiltona nazywamy ***półhamiltonowskim***.

Przykłady



graf dwunastościanu foremnego
(graf platoński)
jest hamiltonowski

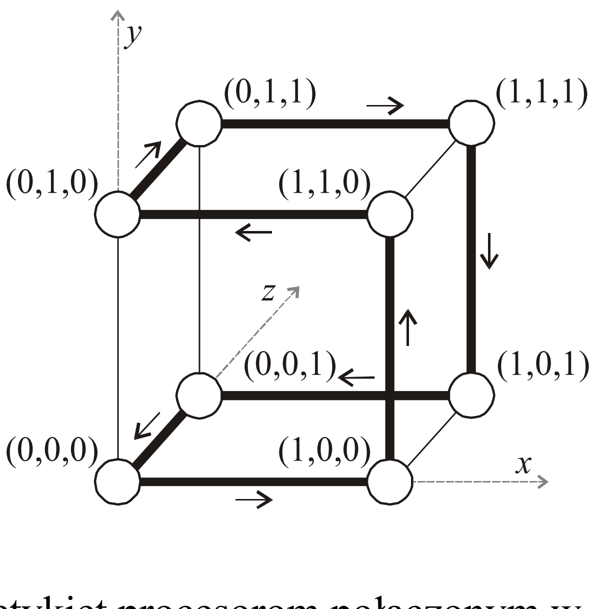


graf Petersena
nie jest hamiltonowski

Przykład cyklu Hamiltona w grafie sześcianu (*związek z kodem Graya*)

Kod Graya rzędu trzeciego (n =3):

(0,0,0)   (1,0,0)   (1,1,0)   (0,1,0)   (0,1,1)   (1,1,1)   (1,0,1)   (0,0,1)



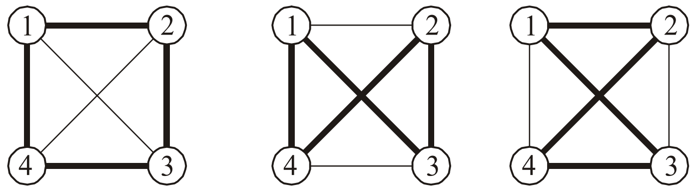
(nadawanie etykiet procesorom połączonym w tzw. kostkę)

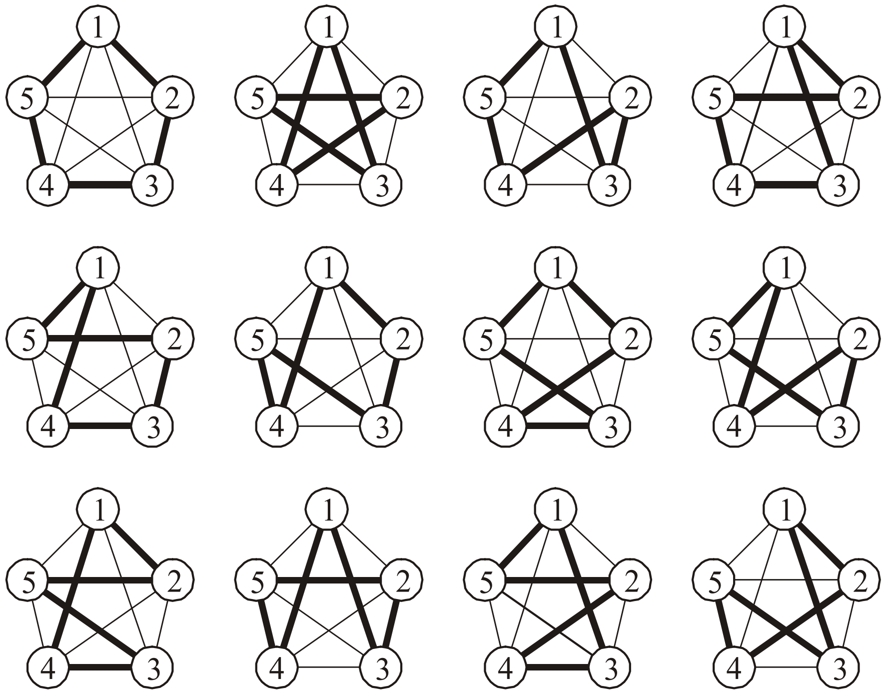
Graf pełny K_n jest hamiltonowski dla każdego $n \geq 3$

i zawiera $\dfrac{(n-1)!}{2}$ cykli Hamiltona.

Przykład cykli Hamiltona w grafie K_4 i K_5

K_4: $\dfrac{(4-1)!}{2} = 3$





K_5: $\dfrac{(5-1)!}{2} = 12$

Twierdzenie

Dla każdego grafu dwudzielnego $G = (V_1 \cup V_2, E)$ zachodzi:

- jeśli G ma cykl Hamiltona, to $|V_1| = |V_2|$,
- jeśli G ma drogę Hamiltona, to $\big||V_1| - |V_2|\big| \leq 1$.

Dla każdego pełnego grafu dwudzielnego, w którym $|V_1 \cup V_2| \geq 3$ zachodzi:

- jeśli $|V_1| = |V_2|$, to G ma cykl Hamiltona,
- jeśli $\big||V_1| - |V_2|\big| \leq 1$, to G ma drogę Hamiltona.

Warunki dostateczne istnienia cyklu Hamiltona

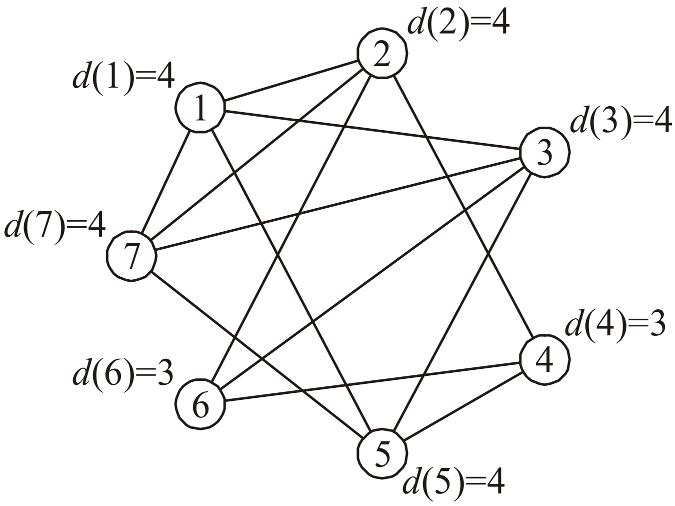
Twierdzenie (Ore, 1960)

Graf (nieskierowany) o n wierzchołkach dla $n \geq 3$, w którym

$d(v) + d(w) \geq n$ dla każdej pary wierzchołków v i w

niepołączonych krawędzią (niezależnych), jest hamiltonowski

Przykład grafu hamiltonowskiego spełniającego warunek Ore

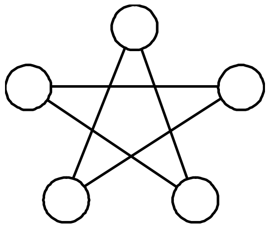


Najniższy stopień mają wierzchołki 4 i 6.

Dla wierzchołków niezależnych z w. 4: $d(v) + d(4) = 7 \geq n = 7$

Dla wierzchołków niezależnych z w. 6: $d(v) + d(6) = 7 \geq n = 7$

Przykład grafu hamiltonowskiego, w którym warunek Ore nie jest spełniony

Dla grafu:  zachodzi $d(v) + d(w) = 4 < n = 5$

dla każdej pary wierzchołków v i w niepołączonych krawędzią,

a cykl Hamiltona oczywiście w nim istnieje.

Wniosek (twierdzenie Diraca, 1952)

Jeśli graf (nieskierowany) ma $n \geq 3$ wierzchołków i $d(v) \geq \frac{n}{2}$ dla każdego wierzchołka, to graf ten jest hamiltonowski.

Dowód

$$\forall v \in V:\ d(v) \geq \frac{n}{2} \ \Rightarrow\ \forall u, w \in V:\ d(u) + d(w) \geq n$$ ■

Wniosek

Jeśli graf ma $n \geq 3$ wierzchołków i co najmniej $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ krawędzi, to jest hamiltonowski.

Dowód

Załóżmy, że graf $G = (V, E)$ ma $|E| = \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2$ krawędzi.

Wybierzmy $u, v \in V$ takie, że $\{u, v\} \notin E$ i usuńmy z grafu wierzchołki u i v oraz wszystkie krawędzie z nimi incydentne.

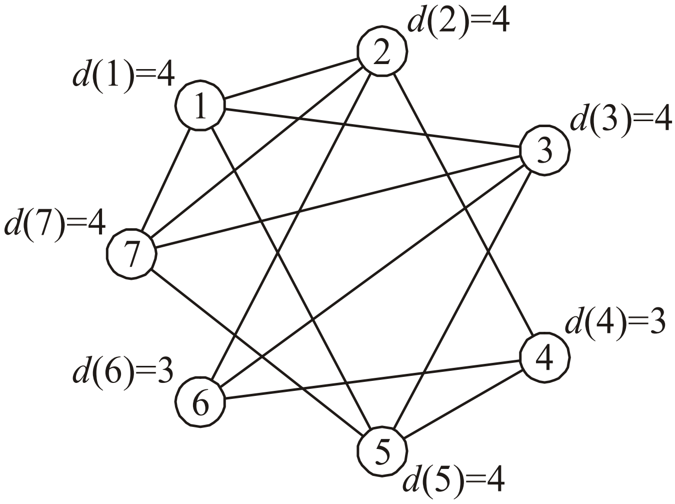
Zatem usunęliśmy $d(u) + d(v)$ krawędzi i 2 wierzchołki.

Otrzymany podgraf $G' = (V', E')$ jest na pewno podgrafem K_{n-2}, a zatem ma nie więcej niż $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ krawędzi.

Mamy więc: $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 - d(u) - d(v) \leq |E'| \leq \frac{(n-2)(n-3)}{2}$.

Stąd $\frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} + 2 = n \leq d(u) + d(v)$ i spełnione są założenia twierdzenia Ore. ■

Przykład grafu hamiltonowskiego (c.d.)



Warunek Ore jest spełniony (patrz poprzedni przykład).

Warunek Diraca nie jest spełniony, bo np. $d(4) = 3 < \frac{n}{2} = 3{,}5$.

Warunek na liczbę krawędzi także nie jest spełniony,

bo $m = 13 < \frac{(n-1)(n-2)}{2} + 2 = 17$.

W grafie G o n wierzchołkach uporządkujmy stopnie wszystkich wierzchołków w ciąg niemalejący:

$$\big(d_1(G), d_2(G), ..., d_n(G)\big), \qquad d_1(G) \le d_2(G) \le ... \le d_n(G);$$

ciąg ten nazywamy ***sekwencją wstępującą*** stopni wierzchołków.

Ciąg liczb naturalnych $(a_1, a_2, ..., a_n)$ nazywamy ***ciągiem hamiltonowskim***, jeśli każdy graf nieskierowany G o n wierzchołkach, którego sekwencja wstępująca stopni wierzchołków spełnia warunek

$$d_i(G) \ge a_i\,, \;\; i = 1, 2, ..., n\,,$$

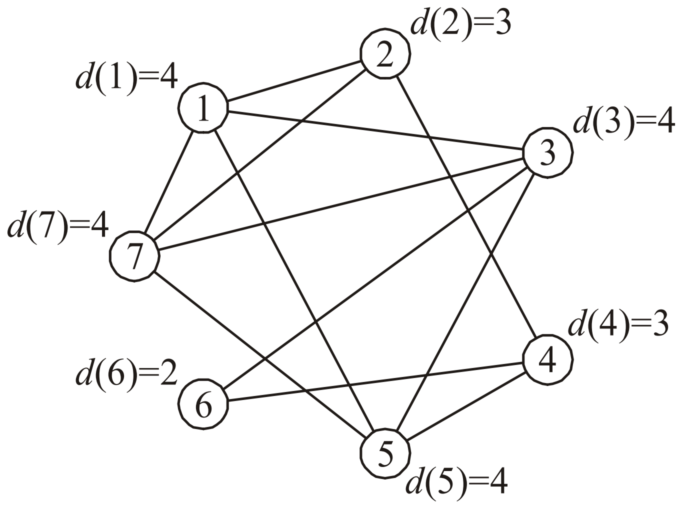
jest grafem hamiltonowskim.

Twierdzenie (Chvátal, 1972)

Ciąg liczb naturalnych $(a_1, a_2, ..., a_n)$,
w którym $0 \le a_1 \le a_2 \le ... \le a_n < n$ dla $n \ge 3$, jest hamiltonowski wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $i < \frac{n}{2}$ spełniona jest implikacja:

$$a_i \le i \Rightarrow a_{n-i} \ge n - i .$$

Przykład grafu hamiltonowskiego



Sekwencja wstępująca stopni wierzchołków: (2, 3, 3, 4, 4, 4, 4).
Zbadajmy, czy jest ona ciągiem hamiltonowskim.

$i = 1$: $a_1 = 2 > 1 \Rightarrow a_6 = 4 < 6$; implikacja prawdziwa $(0 \Rightarrow 0)$

$i = 2$: $a_2 = 3 > 2 \Rightarrow a_5 = 4 < 5$; implikacja prawdziwa $(0 \Rightarrow 0)$

$i = 3$: $a_3 = 3 \le 3 \Rightarrow a_4 = 4 \ge 4$; implikacja prawdziwa $(1 \Rightarrow 1)$

Zatem ciąg (2, 3, 3, 4, 4, 4, 4) jest ciągiem hamiltonowskim,
co oznacza, że graf o takiej sekwencji wstępującej ma cykl Hamiltona.

Warunek Ore nie jest spełniony, bo np. $d(2) + d(6) = 5 < n = 7$