TYPY GRAFÓW c.d.

Graf nazywamy ***dwudzielnym***, jeśli zbiór jego wierzchołków można podzielić na dwa rozłączne podzbiory, tak że żadne dwa wierzchołki należące do tego samego podzbioru nie są sąsiednie.

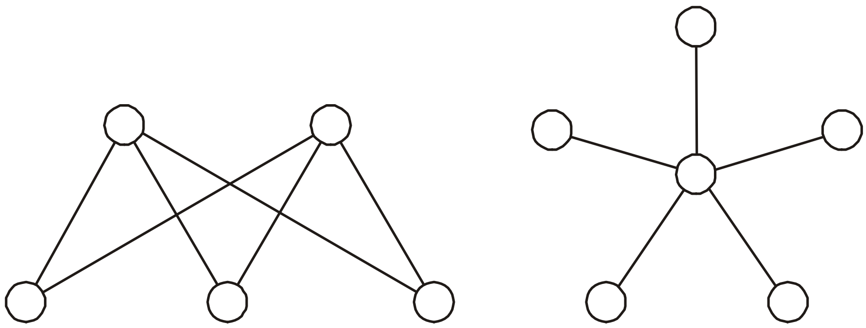
$$G = (V_1 \cup V_2 , E)$$

$$|V_1| = \mathrm{r} , \qquad |V_2| = \mathrm{s} , \qquad V_1 \cap V_2 = \varnothing$$

Graf $G = (V_1 \cup V_2 , E)$ nazywamy ***pełnym grafem dwudzielnym***, jeśli jest dwudzielny i zawiera wszystkie krawędzie łączące wierzchołki ze zbioru V_1 z wierzchołkami ze zbioru V_2.

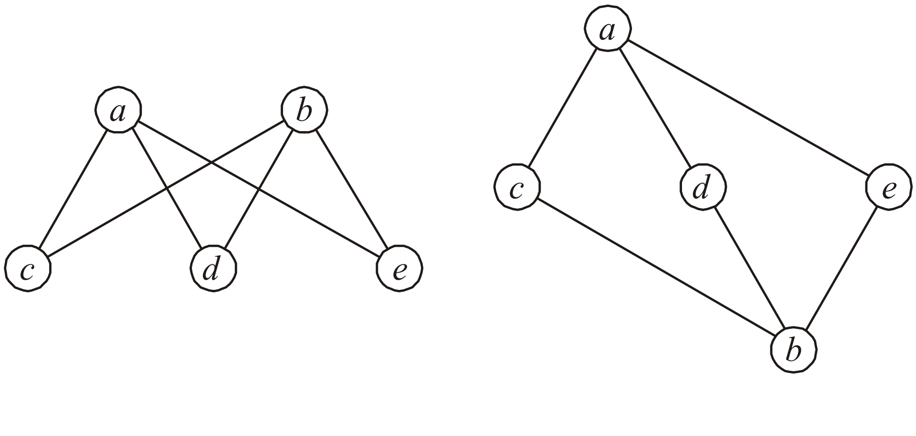
Oznaczenie pełnego grafu dwudzielnego – $\boldsymbol{K}_{r,\,s}$

Przykłady pełnych grafów dwudzielnych



$K_{2,\,3}$ $\qquad$ $K_{1,\,5}$

Graf jest ***planarny*** (płaski), jeśli można go narysować na płaszczyźnie bez przecięć krawędzi.

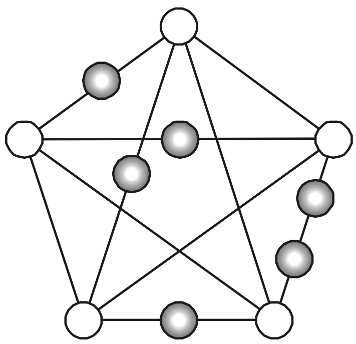


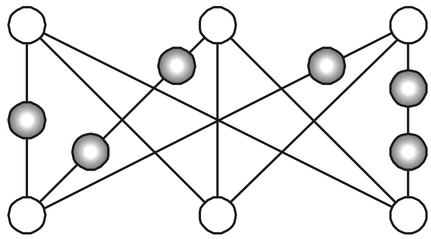
Twierdzenie (Kuratowski)

Graf jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie zawiera podgrafu, który można otrzymać z grafów K_5 lub $K_{3,3}$ przez podział krawędzi wierzchołkami o stopniu 2.

Grafy, które można otrzymać z danego grafu przez podział krawędzi, polegający na wstawieniu dodatkowych wierzchołków stopnia 2, nazywamy grafami homeomorficznymi (z jęz. łac. „*podobnego kształtu*") z tym grafem.

Przykłady grafów homeomorficznych z K_5 i $K_{3,3}$

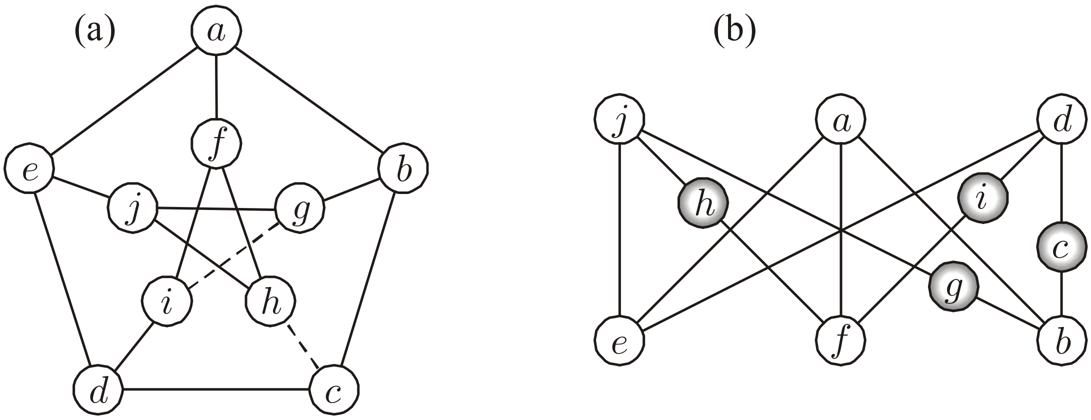




Kazimierz Kuratowski (1896 – 1980)

Przykład zastosowania twierdzenia Kuratowskiego

Tzw. graf Petersena:



$\Rightarrow$ graf Petersena nie jest planarny

DROGI i CYKLE w grafach

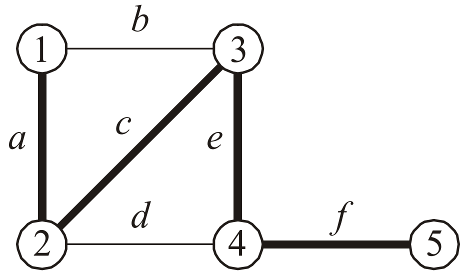
Dla grafu (nieskierowanego) $G = (V, E)$

drogą z wierzchołka $\boldsymbol{v_0 \in V}$ do $\boldsymbol{v_t \in V}$ nazywamy ciąg (naprzemienny) wierzchołków i krawędzi grafu:

$$(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{t-1}, e_t, v_t),$$

spełniający warunek $e_i = \{ v_{i-1}, v_i \}$ dla $i = 1, \ldots, t$

Przykład drogi w grafie



droga: (1, a, 2, c, 3, e, 4, f, 5), $t = 4$

Dla drogi ($v_0, e_1, v_1, e_2, ..., v_{t-1}, e_t, v_t$):

wierzchołek $\boldsymbol{v_0}$ nazywamy jej ***początkiem***, wierzchołek $\boldsymbol{v_t}$ – jej ***końcem*** a liczbę $\boldsymbol{t}$ nazywamy ***długością*** drogi.

Drogę można utożsamiać dla uproszczenia
z ciągiem wierzchołków <u>sąsiednich</u> ($v_0, v_1, ..., v_t$)
lub ciągiem krawędzi <u>zależnych</u> ($e_1, ..., e_t$)

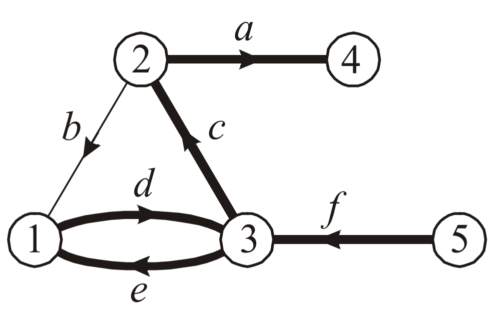
Dla grafu skierowanego $D = (V, A)$

drogą z wierzchołka $\boldsymbol{v_0} \in \boldsymbol{V}$ do $\boldsymbol{v_t} \in \boldsymbol{V}$ nazywamy ciąg (naprzemienny) wierzchołków i łuków grafu:

$$(v_0, a_1, v_1, a_2, ..., v_{t-1}, a_t, v_t),$$

spełniający warunek $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ dla $i = 1, ..., t$

Przykład drogi w grafie skierowanym



droga (5, f, 3, e, 1, d, 3, c, 2, a, 4), $t = 5$

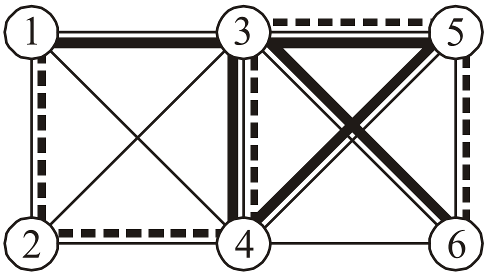
Drogę w grafie skierowanym można utożsamiać dla uproszczenia
z ciągiem odpowiednio skierowanych łuków <u>zależnych</u> ($e_1, ..., e_t$)

---

droga prosta - droga, w której wszystkie <u>krawędzie</u> (<u>łuki</u>) w ciągu <u>są różne</u>

droga elementarna - droga, w której wszystkie <u>wierzchołki</u> w ciągu <u>są różne</u>

Przykłady dróg w grafie



droga prosta (1, 3, 4, 5, 3, 6)

droga elementarna (1, 2, 4, 3, 5, 6)

Cyklem nazywamy drogę, dla której $\boldsymbol{v_0 = v_t}$ (droga zamknięta) i $\boldsymbol{t > 0}$

Cyklem elementarnym nazywamy cykl, w którym wierzchołki

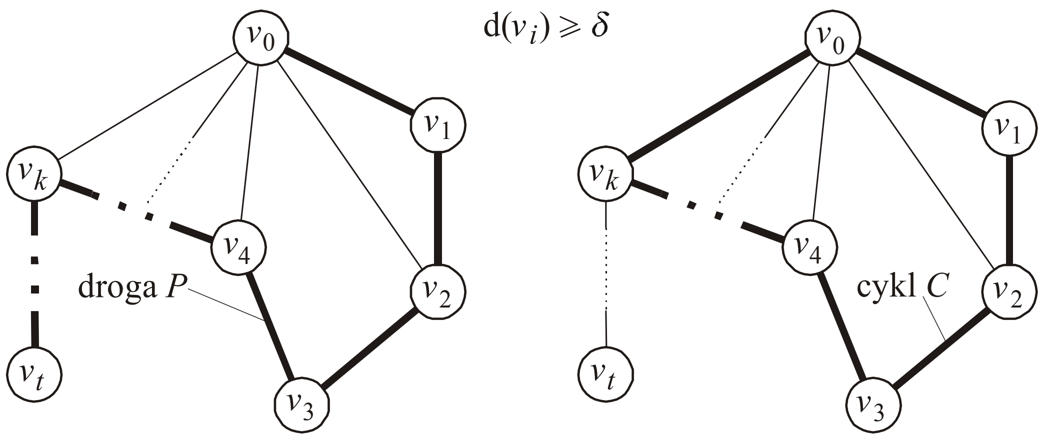
$v_1, v_2, ..., v_{t-1}$ są <u>różne</u>

<u>Twierdzenie</u> (Dirac, 1952)

Jeśli $G = (V, E)$ jest grafem, w którym minimalny stopień wierzchołka jest równy δ, to

- w grafie G istnieje droga <u>elementarna</u> o długości co najmniej δ,
- dla $\delta \geq 2$ w grafie G istnieje cykl <u>elementarny</u> o długości co najmniej $\delta + 1$

<u>Dowód</u>



Niech $P = (v_0, v_1, ..., v_t)$ będzie drogą elementarną w grafie G o maksymalnej długości (tzn. nie można jej przedłużyć na żadnym końcu). Wówczas wszystkie wierzchołki sąsiednie z v_0 muszą należeć do P.

Niech $k = \max \{ i : \{v_0, v_i\} \in E \}$.

Z założenia o maksymalnej długości drogi wynika, że $k \geq d(v_0) \geq \delta$.

Zatem droga P ma długość co najmniej δ.

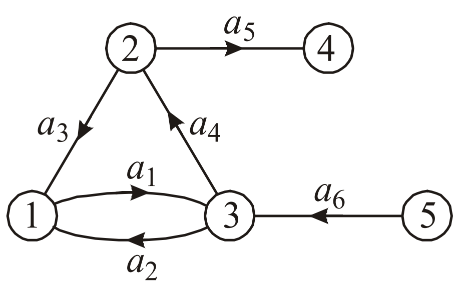
Ponadto, jeśli $\delta \geq 2$, to $C = (v_0, v_1, ..., v_k, v_0)$ jest cyklem elementarnym o długości co najmniej $\delta + 1$. ■

Graf (nieskierowany) nazywamy ***spójnym***, jeśli dla <u>każdej</u> pary wierzchołków u i v istnieje w nim droga z u do v.

Graf skierowany jest ***spójny*** (*słabo spójny*), jeśli jego pochodny graf nieskierowny jest spójny.

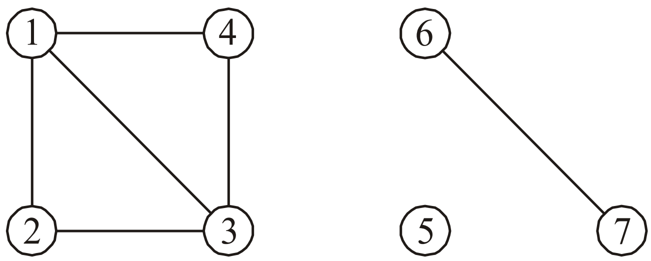
Graf skierowany jest ***silnie spójny***, jeśli dla <u>każdej</u> pary wierzchołków u i v istnieje w nim droga z u do v.

Przykład skierowanego grafu spójnego, ale nie silnie spójnego



Składową spójną grafu nazywamy taki jego podgraf, który jest spójny i nie jest podgrafem innego grafu spójnego.

Przykład grafu o 3 składowych spójnych



Twierdzenie

Dla grafu o n wierzchołkach i k składowych spójnych liczba krawędzi m jest ograniczona przez nierówność:

$$(n-k) \le m \le \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

Wniosek

W grafie spójnym liczba krawędzi m spełnia nierówność:

$$(n-1) \le m \le \frac{n(n-1)}{2}$$

Uwaga

- m jest maksymalne dla grafu pełnego K_n : $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$
- m jest minimalne dla drzewa : $m = n - 1$

Warunek konieczny i dostateczny dwudzielności grafu

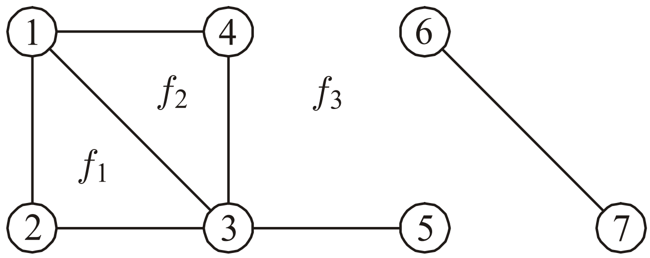
Twierdzenie

Graf o n wierzchołkach, gdzie $n \ge 2$, jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy, kiedy nie zawiera cyklu o nieparzystej długości.

Zauważmy, że w grafie dwudzielnym każdy cykl musi mieć parzystą długość.

Warunki konieczne planarności grafu

Rozważmy rysunek grafu planarnego $G = (V, E)$ bez przecięć krawędzi:



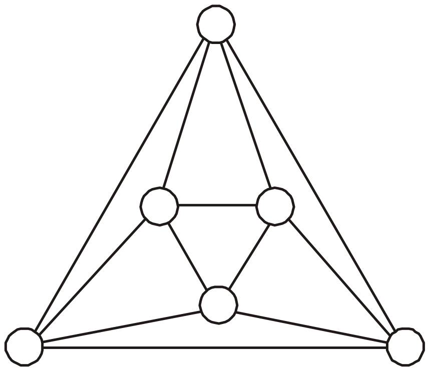
Na tym rysunku można wyróżnić podzbiory punktów płaszczyzny, które mają dwie cechy:

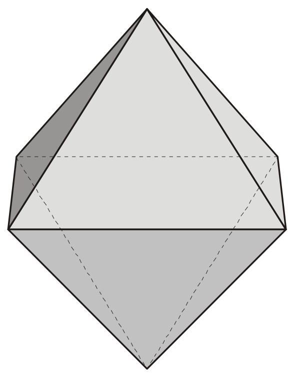
- każde dwa punkty z tego samego zbioru można połączyć krzywą na płaszczyźnie, nie przecinając żadnej z krawędzi grafu;
- każdy z tych podzbiorów jest maksymalny w sensie relacji zawierania.

Takie podzbiory nazywamy ***ścianami*** grafu planarnego (np. f_1, f_2 i f_3). Dokładnie jedna ze ścian jest „nieograniczona".

Przykład interpretacji pojęcia „ściany" dla grafu planarnego

Graf ośmiościanu foremnego (jeden z tzw. grafów platońskich):





Twierdzenie

Jeśli graf o n wierzchołkach, m krawędziach, k składowych spójnych i f ścianach jest planarny, to $\boldsymbol{n - m + f = k + 1}$

Wniosek

Jeśli graf planarny jest spójny, to $\boldsymbol{n - m + f = 2}$ (tzw. wzór Eulera)

Wniosek

Jeśli graf jest planarny i $n \geq 3$, to $\boldsymbol{m \leq 3n - 6}$

Wniosek

Jeśli graf dwudzielny jest planarny i $n \geq 3$, to $\boldsymbol{m \leq 2n - 4}$

Wniosek

Każdy graf planarny musi zawierać co najmniej jeden wierzchołek o stopniu mniejszym niż 6.

PRZESZUKIWANIE GRAFÓW

Przeszukaniem grafu nazywamy dokonanie systematycznego przeglądu grafu w celu wymienienia kolejno wszystkich jego wierzchołków, bądź krawędzi.

Rozważmy spójny graf $G = (V, E)$ o uporządkowanym zbiorze wierzchołków – przyjmijmy dla prostoty, że jego zbiór wierzchołków to $V = \{1, 2, 3, ..., n\}$.

Wynikiem przeszukania grafu będzie ciąg $\left(v_{i_1}, v_{i_2}, ..., v_{i_n}\right)$ zawierający bez powtórzeń wszystkie jego wierzchołki.

Obie przedstawione metody oparte są na badaniu zbiorów wierzchołków sąsiednich, dopisywaniu wierzchołków do wyznaczanego ciągu i nadawaniu lub usuwaniu etykiet z wierzchołków.

Metoda przeszukiwania grafu w głąb

W trakcie działania metody kolejnym wierzchołkom będą nadawane etykiety „*zamknięty*".

Rozpoczynamy od wskazania pierwszego wierzchołka w ciągu – v_0.

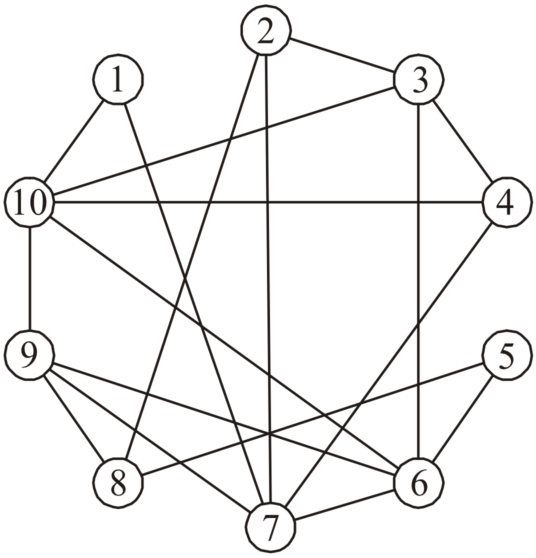
---

1. wstaw v_0 jako pierwszy element ciągu,
2. powtarzaj co następuje, aż do nadania wierzchołkowi v_0 etykiety „*zamknięty*":
   - 2.1. wybierz z aktualnego ciągu ostatni z jego wierzchołków, który nie ma jeszcze etykiety „*zamknięty*",
   - 2.2. jeśli dla wybranego wierzchołka zbiór wierzchołków sąsiednich, które jeszcze nie zostały dopisane do ciągu jest pusty, to nadaj temu wierzchołkowi etykietę „*zamknięty*", w przeciwnym przypadku dopisz do ciągu pierwszy w kolejności z jego wierzchołków sąsiednich, które jeszcze nie został umieszczone w ciągu.

Uwaga:

przed rozpoczęciem przeszukiwania grafu żaden z jego wierzchołków nie może mieć etykiety „zamknięty".

Przykład przeszukania grafu metodą w głąb



Jeśli rozpoczynamy od wierzchołka 5, to zostaje wyznaczony ciąg wierzchołków grafu (5, 6, 3, 2, 7, 1, 10, 4, 9, 8)

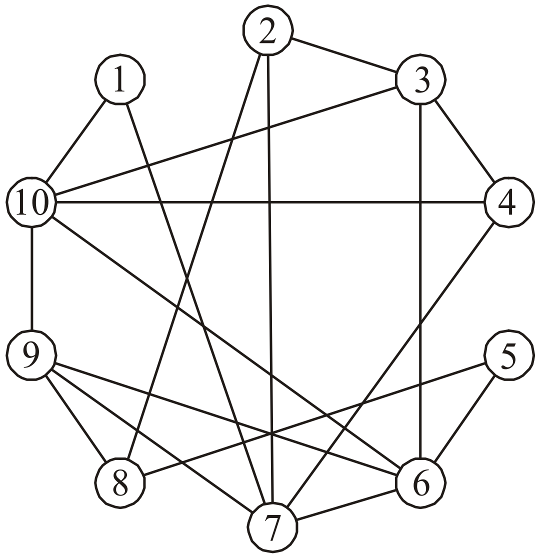
Metoda przeszukiwania grafu wszerz

W trakcie działania metody będą z kolejnych wierzchołków usuwane etykiety „*nowy*".

Rozpoczynamy od wskazania pierwszego wierzchołka w ciągu – v_0.

1. nadaj etykietę „*nowy*" wszystkim wierzchołkom drzewa,
2. wstaw v_0 jako pierwszy element ciągu,
3. dopóki w tworzonym ciągu występuje wierzchołek z etykietą „*nowy*", powtarzaj co następuje:
   3.1. wybierz z aktualnego ciągu pierwszy z wierzchołków, które mają jeszcze etykietę „*nowy*", dodaj do ciągu kolejno wszystkie jego wierzchołki sąsiednie i usuń z tego wierzchołka etykietę „*nowy*".

Przykład przeszukania grafu metodą wszerz



Jeśli rozpoczynamy od wierzchołka 5, to zostaje wyznaczony ciąg wierzchołków grafu (5, 6, 8, 3, 7, 9, 10, 2, 4, 1)