GRAFY i SIECI

GRAFY – podstawowe definicje

Graf: $G = (V, E)$ - para uporządkowana

$V = \{1, 2, ..., n\}$ - zbiór wierzchołków grafu

$E \subseteq \{\{i, j\} : i \neq j \text{ i } i, j \in V\}$ - zbiór krawędzi grafu

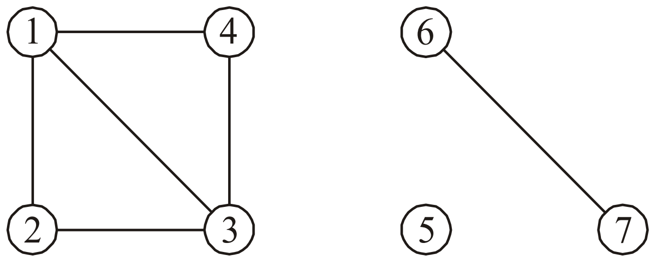
Terminologia:
graf = graf symetryczny, graf nieskierowany, graf niezorientowany

Rysunek grafu:

- **wierzchołek** i przedstawiamy symbolicznie 
- **krawędź** $\{i, j\}$ przedstawiamy 

Przykład grafu

$G = (V, E)$:



$V = \{1, ..., 7\}$, $E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{6, 7\}\}$

Literatura:

- M.Libura, J.Sikorski *„Wykłady z matematyki dyskretnej. Cz.II: Teoria grafów”* Wydawnictwo WSISiZ (2002)
- N.Deo *„Teoria grafów i jej zastosowania w technice”* PWN (1980)
- R.Wilson *„Wprowadzenie do teorii grafów”* PWN (2000)
- K.Ross, C.Wright *„Matematyka dyskretna”* PWN (1996)

Graf skierowany: $D = (V, A)$ - para uporządkowana

$V = \{1, 2, ..., n\}$ - zbiór wierzchołków grafu

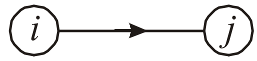
$A \subseteq V \times V$ - zbiór łuków grafu

Terminologia:

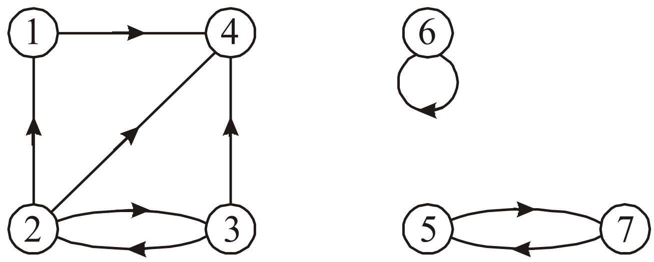
graf skierowany = digraf, graf zorientowany

Rysunek grafu skierowanego:

- **wierzchołek** i przedstawiamy symbolicznie 

- **łuk** (i, j) przedstawiamy 

Przykład grafu skierowanego



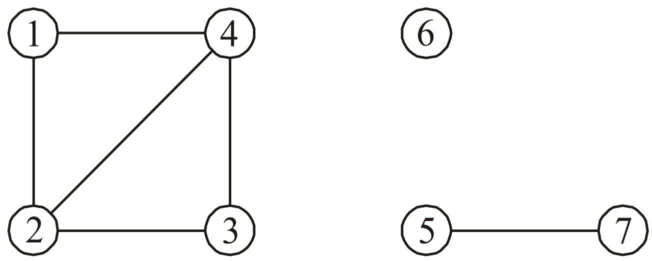
$D = (V, A)$: $V = \{1, ..., 7\}$,

$A = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 7), (6, 6), (7, 5)\}$

Dla grafu skierowanego $D = (V, A)$ definiujemy ***pochodny graf nieskierowany*** $G(D) = (V, E_D)$:

$$\{i, j\} \in E_D \Leftrightarrow (i, j) \in A \vee (j, i) \in A \quad \text{dla } i \neq j$$

Przykład grafu pochodnego



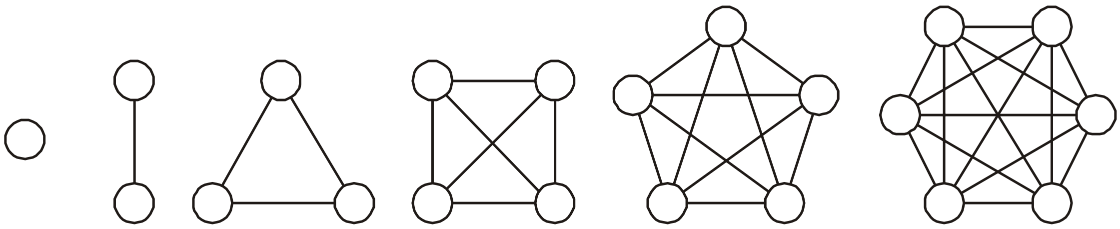
$G(D) = (V, E_D)$:

$V = \{1, ..., 7\}$, $E_D = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$

Graf nazywamy ***pełnym***, jeśli dla każdej pary wierzchołków istnieje krawędź łącząca te wierzchołki.

Symboliczne oznaczenie grafu pełnego o *n* wierzchołkach – $\boldsymbol{K_n}$

Przykłady grafów pełnych



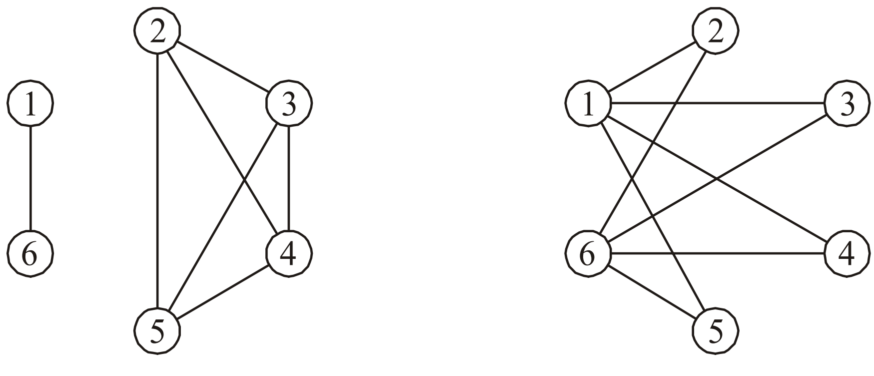
K_1 K_2 K_3 K_4 K_5 K_6

Liczba krawędzi w grafie pełnym K_n wynosi $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Dopełnieniem grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $\overline{G}$, który ma ten sam zbiór wierzchołków co G i wszystkie krawędzie grafu pełnego $K_{|V|}$ nie występujące w grafie G.

Przykład dopełnienia grafu

G $\overline{G}$

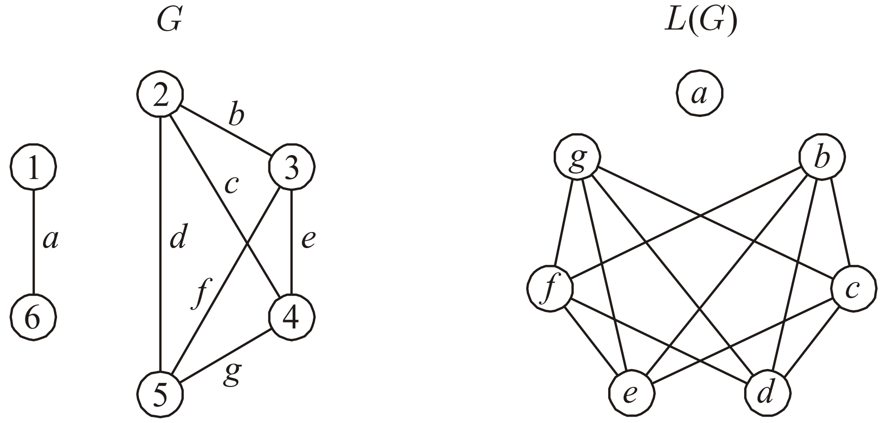


W grafie $G = (V, E)$ dla krawędzi $e = \{i, j\} \in E$ mówimy, że wierzchołki i, j są ***incydentne*** z krawędzią e. Dwa wierzchołki grafu incydentne z tą samą krawędzią nazywamy ***sąsiednimi*** lub ***zależnymi***.

Dwie krawędzie grafu incydentne z tym samym jego wierzchołkiem nazywamy ***zależnymi***.

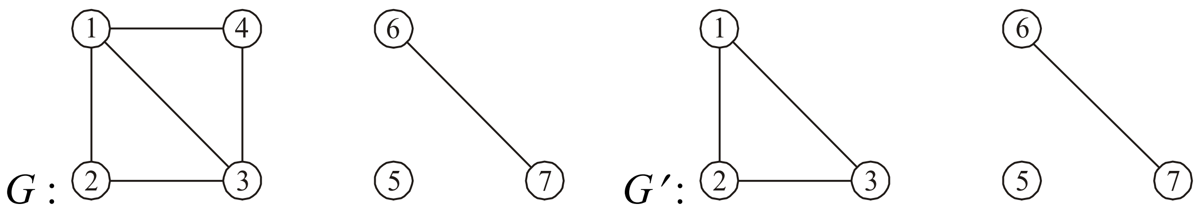
Grafem krawędziowym grafu $G = (V, E)$ nazywamy graf $L(G)$, którego wierzchołki odpowiadają krawędziom grafu G, a krawędzie odpowiadają parom zależnych krawędzi grafu G.

Przykład grafu krawędziowego



Podgrafem grafu $G = (V, E)$ nazywamy każdy graf $G' = (V', E')$, dla którego $V' \subseteq V$ oraz $E' \subseteq E$.

Przykład grafu i jego podgrafu



Grafy a relacje

- Dla grafu skierowanego $D = (V, A)$: A – relacja na zbiorze V
- Dla grafu (nieskierowanego) $G = (V, E)$:

  E może wynikać z relacji R na zbiorze V, która jest symetryczna i nie jest zwrotna: $(i, j) \in R \vee (j, i) \in R \Rightarrow \{ \mathrm{i, j} \} \in E$

STOPNIE WIERZCHOŁKÓW

Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$

krawędź $e = \{i, j\} \in E$

– wierzchołki i oraz j są ***incydentne*** z krawędzią e, a ona z nimi.

– krawędź e łączy dwa wierzchołki i oraz j, które są jej ***końcami***.

– wierzchołki i oraz j są ***sąsiednie*** lub inaczej ***zależne***.

$V(i)$ – zbiór wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem i

$$V(i) = \{ j \in V : \{i, j\} \in E \}$$

$d(i) = |V(i)|$ – ***stopień*** wierzchołka i (inne oznaczenie $\deg(i)$)

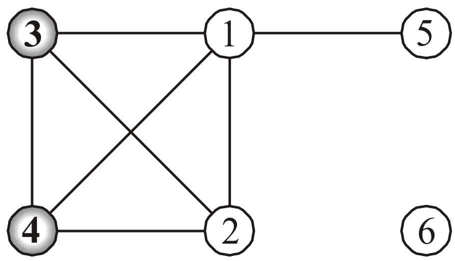
Wierzchołek stopnia 0 nazywamy wierzchołkiem ***izolowanym***.

Dla podzbioru $M \subseteq V$ definiujemy:

$$V_M(i) = \{ j \in M : \{i, j\} \in E \}$$

$d_M(i) = |V_M(i)|$ – ***stopień*** wierzchołka i względem podzbioru M

Przykład wyznaczania stopni wierzchołków w grafie



$V(1) = \{2, 3, 4, 5\} \Rightarrow d(1) = 4$; $V(4) = \{1, 2, 3\} \Rightarrow d(4) = 3$

$V(6) = \varnothing \Rightarrow d(6) = 0$ (wierzchołek izolowany)

dla $M = \{3, 4\}$: $d_M(1) = 2$, $d_M(4) = 1$, $d_M(5) = 0$

Graf skierowany $D = (V, A)$

łuk $a = (i, j) \in A$

– wierzchołki i oraz j są ***incydentne*** z łukiem a

– wierzchołek i jest ***początkiem*** łuku a

– wierzchołek j jego ***końcem*** łuku a

$V^+(i)$ – zbiór końców łuków wychodzących z wierzchołka i

$$V^+(i) = \{ j \in V : (i, j) \in A \}$$

$V^-(i)$ – zbiór początków łuków wchodzących do wierzchołka i

$$V^-(i) = \{ j \in V : (j, i) \in A \}$$

$d^+(i) = | V^+(i) |$ – ***stopień wyjściowy*** wierzchołka i

$d^-(i) = | V^-(i) |$ – ***stopień wejściowy*** wierzchołka i

$d(i) = d^+(i) + d^-(i)$ – ***stopień*** wierzchołka i

Dla podzbioru $M \subseteq V$ definiujemy:

$$V_M^+(i) = \{ j \in M : (i, j) \in A \}$$

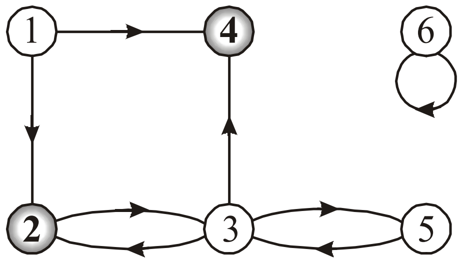
$$V_M^-(i) = \{ j \in M : \{j, i\} \in A \}$$

$d_M^+(i) = |V_M^+(i)|$ – ***stopień wyjściowy*** wierzchołka i względem M

$d_M^-(i) = |V_M^-(i)|$ – ***stopień wejściowy*** wierzchołka i względem M

$d_M(i) = d_M^+(i) + d_M^-(i)$ – ***stopień*** wierzchołka i względem M

Przykład wyznaczania stopni wierzchołków w grafie skierowanym



$V^+(3) = \{2, 4, 5\} \Rightarrow d^+(3) = 3;\ \ V^-(3) = \{2, 5\} \Rightarrow d^-(3) = 2;$

zatem $d(3) = d^+(3) + d^-(3) = 5$

$V^+(6) = \{6\} \Rightarrow d^+(6) = 1;\ \ V^-(6) = \{6\} \Rightarrow d^-(6) = 1;$

zatem $d(6) = d^+(6) + d^-(6) = 2$

dla $M = \{2, 4\}$: $\quad d_M^+(3) = 2, \quad d_M^-(3) = 1, \quad d_M(3) = 3$

<u>Twierdzenie</u> (lemat o uściskach dłoni)

Dla dowolnego grafu (nieskierowanego) $G = (V, E)$ zachodzi

$$\sum_{i \in V} d(i) = 2|E|$$

<u>Twierdzenie</u>

Dla dowolnego grafu skierowanego $D = (V, A)$ zachodzi

$$\sum_{i \in V} d^-(i) = \sum_{i \in V} d^+(i) = |A|$$

Zatem dla grafu skierowanego $D = (V, A)$ także zachodzi

$$\sum_{i \in V} d(i) = 2|A|$$

<u>Wniosek</u>

W każdym grafie skierowanym lub nieskierowanym liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.

MACIERZ INCYDENCJI

Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$

zbiór wierzchołków $V = \{1, 2, ..., n\}$

zbiór krawędzi $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\} \subseteq \{\{i, j\}: \mathrm{i, j} \in V\}$

Macierz incydencji grafu:

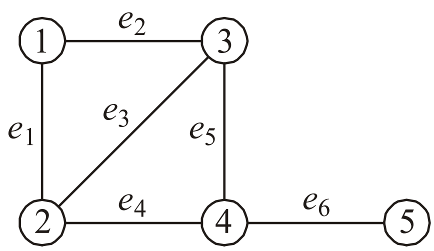
$$I(G) = [\, a_{ij} \,]_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } i \in e_j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy incydencji

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$



$$\mathrm{I}_E = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ d(1) = 2 \\ d(2) = 3 \\ d(3) = 3 \\ d(4) = 3 \\ d(5) = 1 \end{array}$$

$\boldsymbol{\Sigma\, d = 12}$

Aby wykazać, że $\sum_{i \in V} d(i) = 2|E|$ wystarczy zsumować wiersze macierzy incydencji i policzyć w niej wszystkie jedynki.

Graf skierowany (bez pętli) $D = (V, A)$

zbiór wierzchołków $V = \{1, 2, ..., n\}$

zbiór krawędzi $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\} \subseteq V \times V$

Macierz incydencji grafu skierowanego bez pętli:

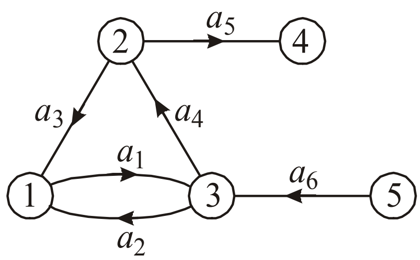
$$I(D) = [\, a_{ij} \,]_{i=1,...,n,\ j=1,...,m}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{jesli} \quad a_j = (k,i) \\ 1 & \text{jesli} \quad a_j = (i,k) \\ 0 & \quad\ \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy incydencji

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$E = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\} = \{(1, 3), (3, 1), (2, 1), (3, 2), (2, 4), (5, 3)\}$



$$\mathrm{I}_A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{lll} \\ d^+(1) = 1, & d^-(1) = 2, & d(1) = 3 \\ d^+(2) = 2, & d^-(2) = 1, & d(2) = 3 \\ d^+(3) = 2, & d^-(3) = 2, & d(3) = 4 \\ d^+(4) = 0, & d^-(4) = 1, & d(4) = 1 \\ d^+(5) = 1, & d^-(5) = 0, & d(5) = 1 \end{array}$$

$$\Sigma\, d^+ = 6, \quad \Sigma\, d^- = 6, \quad \Sigma\, d = 12$$

Aby wykazać, że $\sum_{i \in V} d^-(i) = \sum_{i \in V} d^+(i) = |A|$ wystarczy policzyć ile jest niezerowych elementów o jednakowych znakach w wierszach macierzy incydencji i w całej macierzy.

MACIERZ SĄSIEDZTWA WIERZCHOŁKÓW

Graf (nieskierowany) $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$

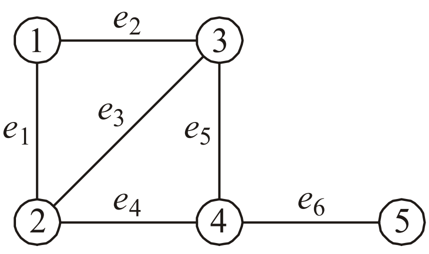
Macierz sąsiedztwa wierzchołków grafu:

$$B(G) = [\, b_{ij} \,]_{i=1,\dots,n,\; j=1,\dots,n}$$

$$b_{ij} = b_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } \{i, j\} \in E \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy sąsiedztwa wierzchołków

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} & \\ \mathrm{B}_E = \begin{array}{c} 1\\2\\3\\4\\5 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} d(1) = 2 \\ d(2) = 3 \\ d(3) = 3 \\ d(4) = 3 \\ d(5) = 1 \end{array} \\ & \begin{array}{ccccc} d(1) = 2 & d(2) = 3 & d(3) = 3 & d(4) = 3 & d(5) = 1 \end{array} & \end{array}$$

Graf skierowany $D = (V, A)$, $V = \{1, 2, ..., n\}$

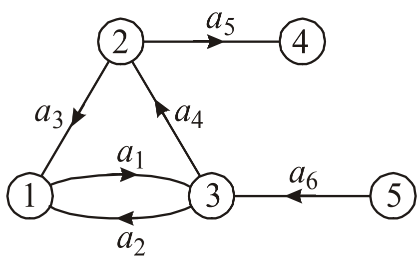
Macierz sąsiedztwa wierzchołków grafu:

$$B(D) = [\, b_{ij} \,]_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,n}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jesli } (i, j) \in A \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Przykład wyznaczania macierzy sąsiedztwa wierzchołków

$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$



$$B_A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ \\ \end{array} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \left[\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right. & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right] \\ d^-(1) = 2 & d^-(2) = 1 & d^-(3) = 2 & d^-(4) = 1 & d^-(5) = 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ d^+(1) = 1 \\ d^+(2) = 2 \\ d^+(3) = 2 \\ d^+(4) = 0 \\ d^+(5) = 1 \\ \\ \end{array}$$

TYPY GRAFÓW

Dwa grafy (nieskierowane) $G = (V, E)$ i $G' = (V', E')$ są ***izomorficzne***, jeśli istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $f : V \xrightarrow{1-1} V'$, takie że dla dowolnej pary wierzchołków $i, j \in V$ zachodzi

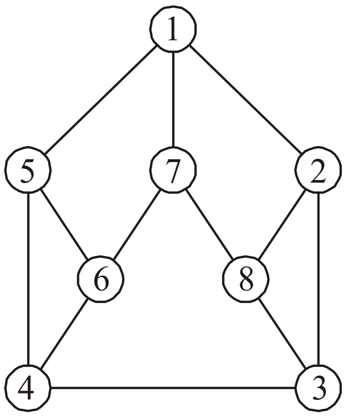
$$\{ i, j \} \in E \Leftrightarrow \{ f(i), f(j) \} \in E'$$

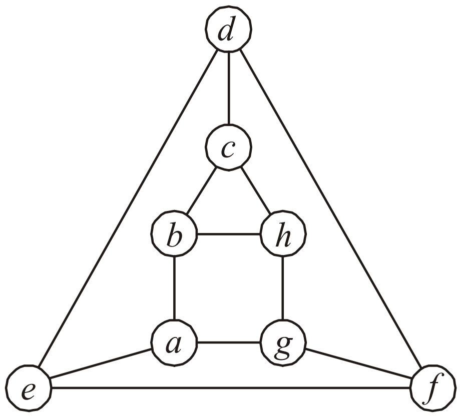
Dla grafów skierowanych $D = (V, A)$ i $D' = (V', A')$ odpowiednio:

$$(i, j) \in A \Leftrightarrow \big(f(i), f(j) \big) \in A'$$

Izomorfizm grafów zapisujemy $G \cong G'$

Przykład grafów izomorficznych





Izomorfizm:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
$f(i)$	a	b	c	d	e	f	g	h

Graf nazywamy ***regularnym***, jeśli wszystkie jego wierzchołki mają ten sam stopień.

Uwaga

Dwa grafy regularne o tej samej liczbie wierzchołków i tym samym stopniu wierzchołków nie muszą być izomorficzne.

Przykład ilustrujący brak izomorfizmu