Planowanie przedsięwzięć

Model przedsięwzięcia

- lista operacji
- relacje poprzedzania operacji
- modele operacji
- funkcja celu planowania

Relacje poprzedzania operacji (A→ B)

- Koniec A - Start B – operacja B nie może się rozpocząć przed zakończeniem A
- Koniec A - Koniec B – operacja B nie może się zakończyć przed zakończeniem A
- Start A - Start B – operacja B nie może się rozpocząć przed rozpoczęciem A
- Start A - Koniec B – operacja B nie może się zakończyć przed rozpoczęciem A

Modele operacji

- czasy trwania
  - deterministyczne
  - deterministyczne zależne od wielkości przydzielonego zasobu
  - niepewne
- wymagania zasobowe

Funkcje celu planowania

- minimalizacja czasu realizacji przedsięwzięcia (przy zadanych zasobach)
- minimalizacja wykorzystania zasobów (przy zadanym czasie realizacji przedsięwzięcia)

Przykład
Projekt implementacji ośmiu modułów systemu informatycznego

- lista operacji

  M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7, M8

  gdzie M*i, i*=1,...,8 – oznacza operację implementacji modułu *i*

- relacje poprzedzania i czasy trwania operacji

operacja	**operacje poprzedzające**	**czas trwania [tygodnie]**
M1	–	13
M2	–	8
M3	M1	9
M4	M1	15
M5	M2	20
M6	M2, M3	3
M7	M2, M3	4
M8	M4, M6	10

Metoda ścieżki krytycznej CPM (Critical Path Method)

Model przedsięwzięcia

- relacje poprzedzania: Koniec-Start
- model operacji
  - czasy trwania: deterministyczne
  - brak ograniczeń zasobowych
- funkcja celu: minimalizacja czasu realizacji przedsięwzięcia

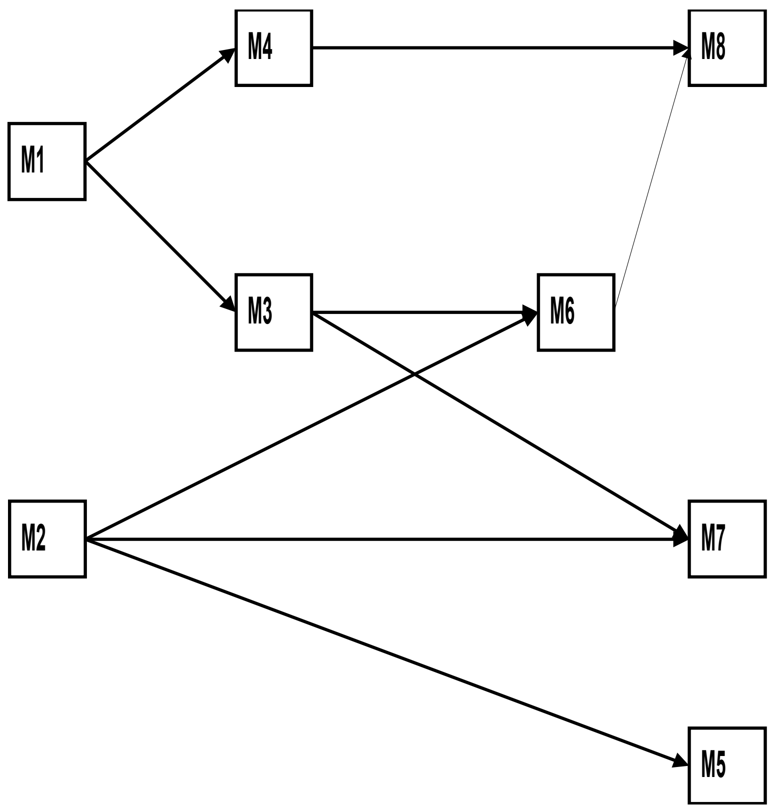
Schemat metody

1. Konstrukcja sieci przedsięwzięcia
2. Wyznaczenie najwcześniejszych terminów (chwil) zdarzeń i ścieżki krytycznej
   - sortowanie topologiczne wierzchołków sieci
   - wyliczanie najdłuższych odległości
   - określenie najdłuższej ścieżki
3. Wyznaczenie najpóźniejszych terminów (chwil) zdarzeń i zapasów czasowych operacji

Sieć przedsięwzięcia

(*w reprezentacji wierzchołkowej*)

wierzchołki sieci: operacje
łuki sieci: relacje poprzedzania



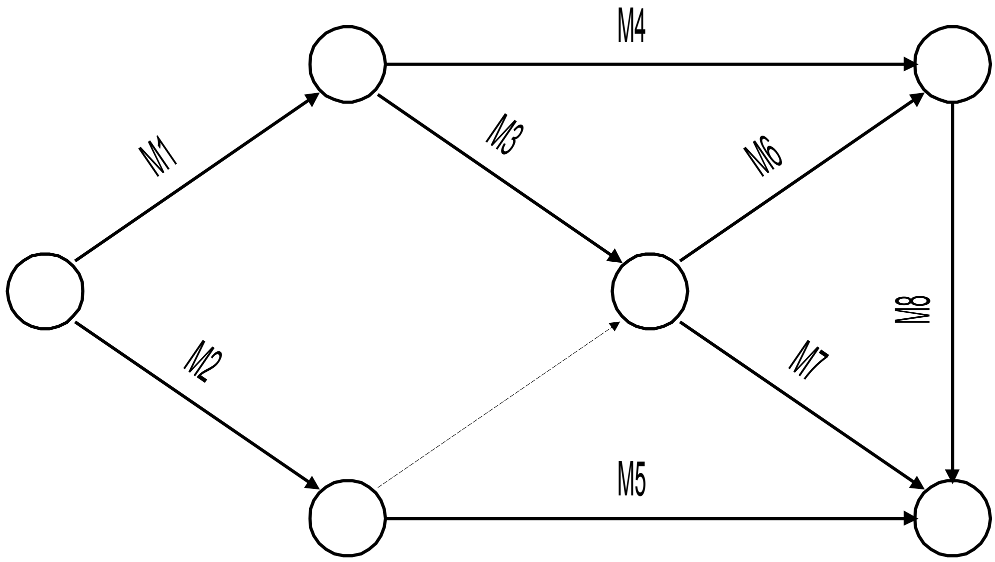
Właściwości

- Graf acykliczny

Sieć przedsięwzięcia

(*w reprezentacji łukowej*)

wierzchołki sieci: zdarzenia
łuki sieci: operacje



Właściwości

- Graf acykliczny
- mogą występować sztuczne (fikcyjne) łuki

Sortowanie topologiczne

Wierzchołki grafu $G(V,E)$ są ponumerowane topologicznie, jeżeli $(i, j) \in E \Leftrightarrow num(i) < num(j)$

Algorytm sortowania (numerowania)

Założenia:

- na początku wszystkie wierzchołki są bez numeru
- $n \geq 1$

1. *num* := 1;
2. Znajdź wierzchołek bez numeru do którego nie dochodzi żaden łuk. Jeżeli taki wierzchołek istnieje, to przypisz mu numer *num* i idź do 3. W przeciwnym przypadku STOP – w grafie jest cykl;
3. Jeżeli wszystkie wierzchołki są ponumerowane to STOP. W przeciwnym przypadku usuń łuki wychodzące z ponumerowanego wierzchołka, *num* := *num* + 1 i idź do 2.

Najwcześniejsze terminy zdarzeń

Oznaczenia:

V – zbiór wierzchołków sieci przedsięwzięcia (posortowanych topologicznie)

$n = |V|$

E – zbiór łuków (operacji)

p_{ij} – czas trwania operacji $(i, j) \in E$

s_i – najwcześniejszy możliwy termin wystąpienia zdarzenia $i \in V$ (wszystkie poprzedzające operacje muszą być zakończone)

Aby operacje poprzedzające ”zdążyły” się wykonać musi zachodzić

$$s_i + p_{ij} \leq s_j \text{ dla każdej operacji } (i, j) \in E$$

Wnioski

- s_i = długość najdłuższej ścieżki z wierzchołka 1 do i
- minimalny czas realizacji przedsięwzięcia określa s_n czyli najdłuższa ścieżka z wierzchołka 1 do n (*ścieżka krytyczna*).
- dla wszystkich operacji (i, j) na ścieżce krytycznej zachodzi

$$s_i + p_{ij} = s_j$$

Wyznaczanie najwcześniejszych terminów zdarzeń

(znajdowanie najdłuższej ścieżki w grafie posortowanym topologicznie – złożoność $O(|E|)$)

$s_1 := 0;$

for j :=2 to n do

$$s_j := \max_{i:(i,j)\in E} \{s_i + p_{ij}\}$$

Wyznaczanie minimalnego czasu realizacji przedsięwzięcia

- $T = s_n$ (najdłuższa ścieżka od wierzchołka 1 do n)
- Model programowania liniowego

$$\min T = t_n$$

przy ograniczeniach

$$t_i + p_{ij} \le t_j \qquad (i, j)\in E$$

$$t_i \ge 0 \qquad i \in V$$

gdzie t_i – zmienna określająca termin zdarzenia $i\in V$

Na ścieżce krytycznej t_i=s_i (w szczególności t_n=s_n)

Najpóźniejsze terminy zdarzeń

Oznaczenia:

l_i – najpóźniejszy dopuszczalny termin zdarzenia $i \in V$ (przy założeniu, że przedsięwzięcie jest realizowane w najkrótszym możliwym czasie tzn., $l_n = s_n$)

Aby operacje następne ”zdążyły” się wykonać bez wydłużania terminu realizacji przedsięwzięcia $l_n = s_n$ musi zachodzić

$$l_i + p_{ij} \leq l_j \text{ dla każdej operacji } (i, j) \in E$$

Wnioski

- $l_i = s_n$ – (długość najdłuższej ścieżki z i do n)
- $l_i \geq s_i$ dla każdego wierzchołka $i \in V$
- dla wszystkich operacji (i, j) na ścieżce krytycznej zachodzi

$$l_i + p_{ij} = l_j$$

- dla wszystkich wierzchołków i na ścieżce krytycznej zachodzi

$$l_i = s_i$$

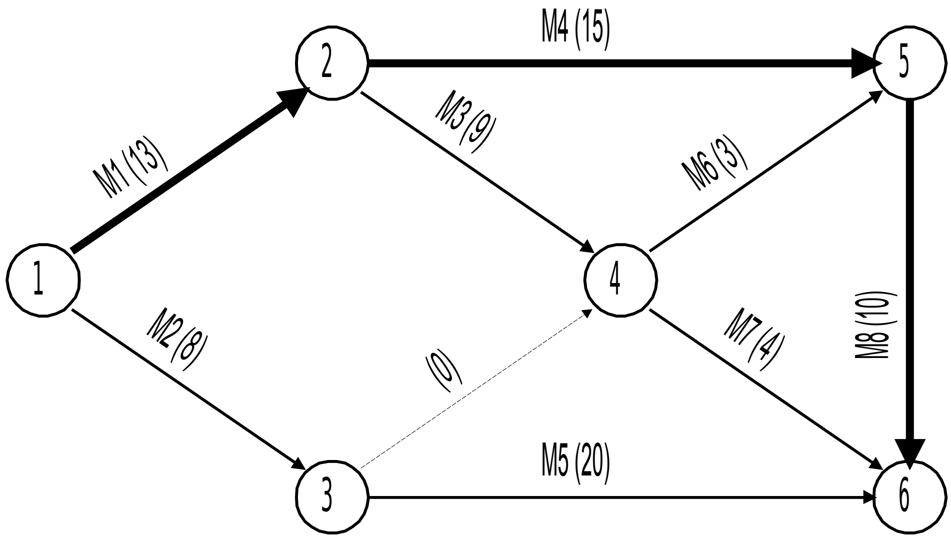
Wyznaczanie najpóźniejszych terminów zdarzeń

$l_n := s_n$;

for $i := n - 1$ to 1

$$l_i := \min_{j:(i,j) \in E} \{l_j - p_{ij}\}$$

Przykład



Terminy zdarzeń

i (nr wierzchołka - zdarzenia)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
s_i	0	13	8	22	28	38
l_i	0	13	18	25	28	38

s_i – termin najwcześniejszy możliwy
l_i – termin najpóźniejszy dopuszczalny

Najwcześniejsze i najpóźniejsze terminy rozpoczęcia i zakończenia operacji

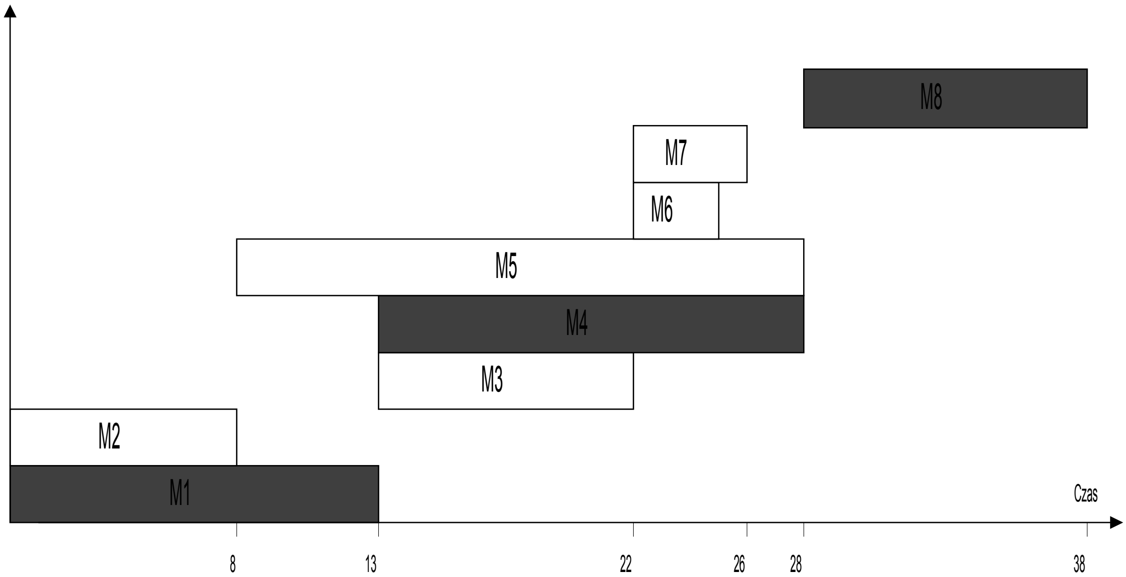
- Najwcześniejszy możliwy termin rozpoczęcia operacji (i, j)
  $NWR(i, j) = s_i$
- Najwcześniejszy możliwy termin zakończenia operacji (i, j)
  $NWZ(i, j) = s_i + p_{ij}$
- Najpóźniejszy dopuszczalny termin rozpoczęcia operacji (i, j)
  $NPR(i, j) = l_j - p_{ij}$
- Najpóźniejszy dopuszczalny termin zakończenia operacji (i, j)
  $NPZ(i, j) = l_j$

Terminy rozpoczęcia i zakończenia operacji

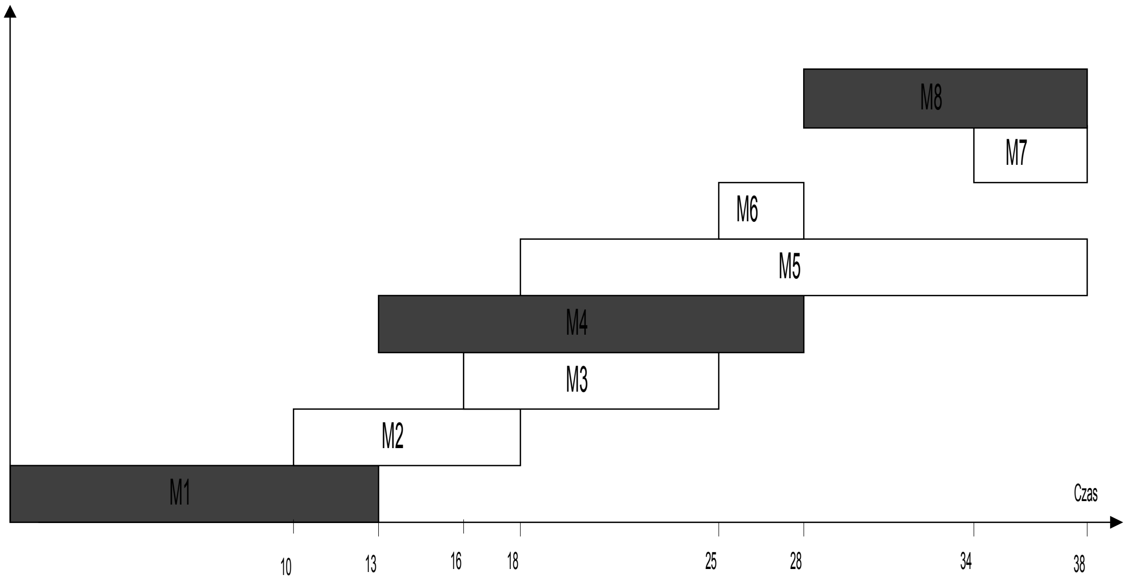
operacja	**M1**	**M2**	**M3**	**M4**	**M5**	**M6**	**M7**	**M8**
NWR	0	0	13	13	8	22	22	28
NWZ	13	8	22	28	28	25	26	38
NPR	0	10	16	13	18	25	34	28
NPZ	13	18	25	28	38	28	38	38

Harmonogram (wykres Gantta)

przy najwcześniejszych terminach realizacji operacji



przy najpóźniejszych terminach realizacji operacji



Zapasy (luzy) czasowe operacji

- Zapas (luz) całkowity – maksymalne opóźnienie operacji nie powodujące opóźnienia przedsięwzięcia

  $ZC(i, j) = l_j - s_i - p_{ij}$

  $ZC(i, j) = NPR(i, j) - NWR(i, j) = NPZ(i, j) - NWZ(i, j)$

- Zapas (luz) swobodny – maksymalne opóźnienie operacji nie wpływające na czas rozpoczęcia następnych operacji

  $ZS(i, j) = \min \{s_j - s_i - p_{ij}\}$

Zapasy

operacja	**M1**	**M2**	**M3**	**M4**	**M5**	**M6**	**M7**	**M8**
ZC	0	10	3	0	10	3	12	0
ZS	0	0	0	0	10	3	12	0

Na ścieżce krytycznej zapasy zerowe

Metoda PERT
(Program Evaluation and ReviewTechnique)

Model przedsięwzięcia

- relacje poprzedzania: Koniec-Start
- model operacji
  - – brak wymagań zasobowych
  - – czasy trwania: zmienna losowa (rozkład beta)

    parametry:

    a – ocena optymistyczna
    m – czas najbardziej prawdopodobny
    b – ocena pesymistyczna

Wzory aproksymujące

$$E(p) = \frac{a + 4m + b}{6}, \quad \sigma(p) = \frac{b - a}{6}$$

Schemat metody

1. Konstrukcja sieci przedsięwzięcia
2. Wyznaczenie ścieżki krytycznej dla wartości oczekiwanych czasów operacji
3. Analiza czasu realizacji przedsięwzięcia w oparciu o rozkład normalny

Czas trwania przedsięwzięcia w metodzie PERT

Zmienna losowa:

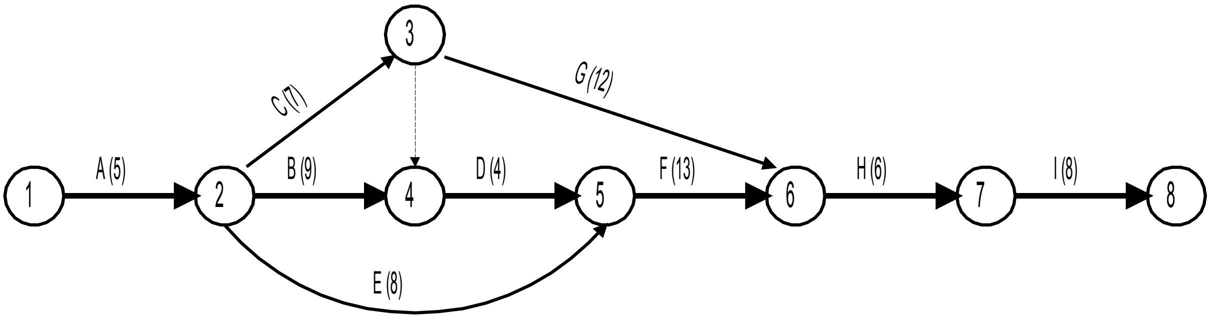
$$T = \sum_{(i,j)\in Kryt} p_{ij}$$

Suma dużej liczby niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie ma zgodnie z centralnym twierdzeniem granicznym rozkład zbliżony do **normalnego**

$$E(T) = \sum_{(i,j)\in Kryt} E(p_{ij}) \qquad \sigma^2(T) = \sum_{(i,j)\in Kryt} \sigma^2(p_{ij})$$

Metoda PERT – przykład

operacja	**poprzed..**	a	m	b	$E(p_{ij})$	$\sigma(p_{ij})$	$\sigma^2(p_{ij})$
A	–	2	5	8	5	1	1
B	A	6	9	12	9	1	1
C	A	6	7	8	7	1/3	1/9
D	B,C	1	4	7	4	1	1
E	A	8	8	8	8	0	0
F	D,E	5	14	17	13	2	4
G	C	3	12	21	12	3	9
H	F,G	3	6	9	6	1	1
I	H	5	8	11	8	1	1



Ścieżka krytyczna: A – B – D – F – H – I

$E(T) = 5 + 9 + 4 + 13 + 6 + 8 = 45$

$\sigma^2(T) = 1 + 1 + 1 + 4 + 1 + 1 = 9$

$\sigma(T) = \sqrt{\sigma^2(T)} = 3$

$$P(T \leq 50) = P(Z \leq \frac{50-45}{3}) = P(Z \leq 1.67) = 0.95$$

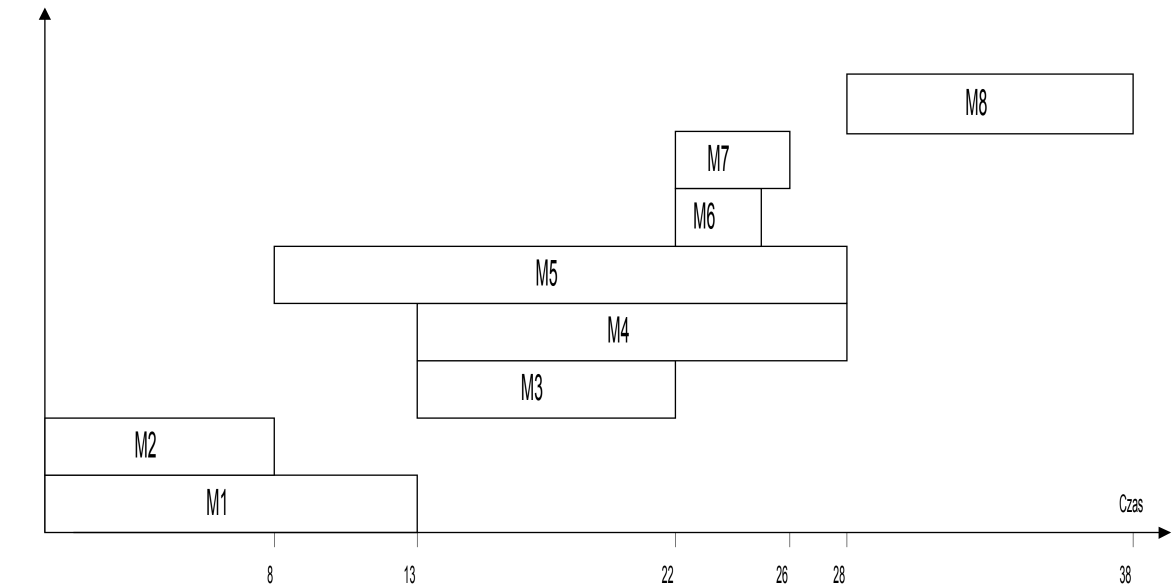
$$P(T \leq 41) = P(Z \leq \frac{41-45}{3}) = P(Z \leq -1.33) = 0.09$$

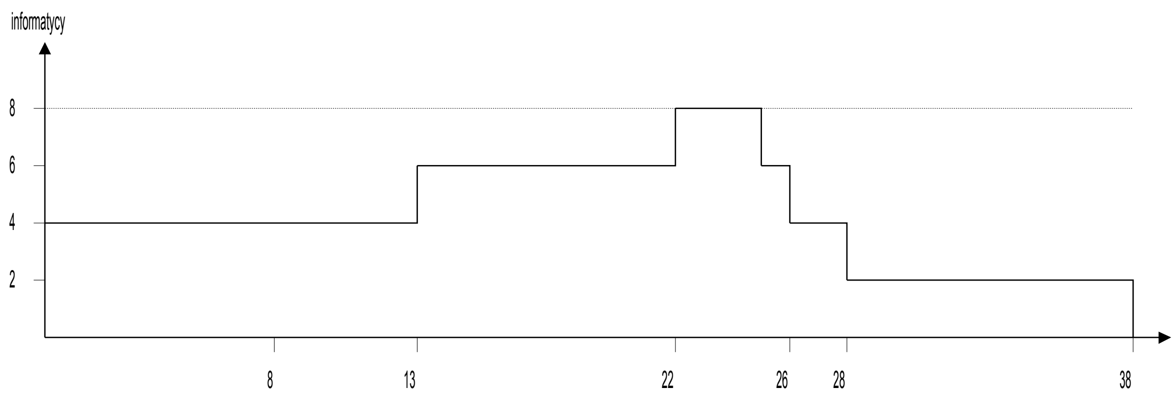
Ograniczenia zasobowe

Przykład – przydział zasobów odnawialnych

Każda z operacji M1, M2, ..., M8 wymaga pracy dwóch informatyków.

Harmonogram i zużycie zasobów przy najwcześniejszych terminach rozpoczynania operacji





Kryteria planowania

- minimalizacja liczby zatrudnianych pracowników (przy zadanym czasie realizacji przedsięwzięcia)

czas realizacji	38-44	45-81	≥ 82
pracownicy	6	4	2

- minimalizacja czasu realizacji przedsięwzięcia (przy zadanej liczbie pracowników)

pracownicy	< 2	2-3	4-5	≥ 6
czas realizacji	–	82	45	38

- analiza dwukryterialna

  rozwiązania niezdominowane (Pareto-optymalne)

czas realizacji	38	45	82
pracownicy	6	4	2

Ograniczenia zasobowe

Przydział zasobów zużywalnych

Czas wykonania poszczególnych operacji można skrócić jeżeli przydzieli się jej pewną ilość zasobu (np. środków pieniężnych)

Założenia

p_{ij}^{max} – nominalny (maksymalny) czas trwania operacji (i, j) bez przydziału zasobu

k_{ij} – koszt skrócenia czasu wykonywania operacji (i, j) o jednostkę czasu (współczynnik zużycia zasobu)

p_{ij}^{min} – minimalny czas trwania operacji, którego nie można dalej skrócić poprzez przydział zasobu

Minimalizacja czasu trwania przedsięwzięcia przy zadanej (ograniczonej) wielkości zasobu

Z – wielkość zasobu (ilość dostępnych środków)

Podejścia

- skracanie czasu trwania przedsięwzięcia poprzez przydział kolejnych jednostek zasobu do najmniej „kosztownych" operacji na ścieżce krytycznej
- model Programowania Liniowego

$$\min T = t_n$$

przy ograniczeniach

$$
\begin{aligned}
& t_i + p_{ij} \le t_j && (i,j) \in E \\
& p_{ij} = p_{ij}^{max} - (1/k_{ij})\, z_{ij} && (i,j) \in E \\
& \textstyle\sum_{(i,j)\in E} z_{ij} \le Z && \\
& t_i \ge 0 && i \in V \\
& p_{ij} \ge p_{ij}^{min} && (i,j) \in E \\
& z_{ij} \ge 0 && (i,j) \in E
\end{aligned}
$$

Zmienne decyzyjne:

t_i – termin zdarzenia $i \in V$

p_{ij} – czas trwania operacji po ewentualnym skróceniu

z_{ij} – wielkość zasobu przydzielona do operacji (i, j)

Minimalizacja zużycia zasobu przy zadanym maksymalnym czasie trwania przedsięwzięcia

T – maksymalny dopuszczalny czas trwania przedsięwzięcia

• model Programowania Liniowego

$$
\begin{array}{ll}
\min Z & \\
\text{przy ograniczeniach} & \\
t_i + p_{ij} \le t_j & (i, j) \in E \\
t_n \le T & \\
p_{ij} = p_{ij}^{max} - (1/k_{ij})\, z_{ij} & (i, j) \in E \\
\sum_{(i,j)\in E} z_{ij} = Z & \\
t_i \ge 0 & i \in V \\
p_{ij} \ge p_{ij}^{min} & (i, j) \in E \\
z_{ij} \ge 0 & (i, j) \in E
\end{array}
$$

Zmienne decyzyjne: t_i, p_{ij}, z_{ij}, Z