Modele probabilistyczne zjawisk losowych

Pojęcia podstawowe:

Zdarzenia elementarne: najprostsze zdarzenie mogące być wyróżnione dla danego doświadczenia losowego.

Ω - zbiór zdarzeń elementarnych.

Zdarzenie losowe: dowolny podzbiór zbioru zdarzeń elementarnych Ω

Rodzina zdarzeń losowych (σ-ciało podzbiorów zbioru zdarzeń elementarnych Ω) $\mathcal{F}$ **-** rodzina podzbiorów zdarzeń elementarnych taka, że

$\mathcal{F} \in \Omega$

jeżeli $A \in \mathcal{F}$ **i** $B \in \mathcal{F}$**, to** $A \cup B \in \mathcal{F}$

jeżeli $A \in \mathcal{F}$ **i** $B \in \mathcal{F}$**, to** $A \cap B \in \mathcal{F}$

jeżeli $A \in \mathcal{F}$ **, to** $\overline{A} \in \mathcal{F}$

Prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A **:** funkcja rzeczywista **P(**A**)** na rodzinie zdarzeń $\mathcal{F}$, taka że

1) dla każdego $A \in \mathcal{F}$, $\quad P(A) \geq 0$

2) $P(\Omega)=1$

3) dla zdarzeń parami rozłącznych

$$\mathbf{P(A_1 \cup A_2 \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots}$$

<u>Przestrzeń probabilistyczna:</u> trójka uporządkowana (Ω, $\mathcal{F}$, **P**). Określając przestrzeń probabilistyczną określamy model probabilistyczny danego zjawiska.

Zmienna losowa

Niech dana będzie przestrzeń probabilistyczna (Ω, $\mathcal{F}$, P). Funkcję *X* określoną na przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω, o wartościach rzeczywistych oraz taką, że dla każdego t$\in\mathcal{R}$ zbiór

$$\{\omega \in \Omega\text{:}\ X(\omega) < t\}$$

jest zdarzeniem (czyli należy do $\mathcal{F}$) będziemy nazywać *zmienną losową*.

Interpretacja:
Zmienna losowa jest to funkcja przyporządkowująca podzbiorom zbioru zdarzeń elementarnych (zdarzeniom losowym) odpowiednie podzbiory liczb rzeczywistych.

Zmienne losowe oznaczamy **dużymi** literami; na przykład ***X***.

To, co zaobserwujemy w konkretnym doświadczeniu nazywamy **realizacją zmiennej losowej** i oznaczamy **małą** literą; na przykład ***x***.

Przykłady zmiennych losowych:

Przykład 1 (zmienna skokowa – skończony zbiór wartości)
Badanie jakości wyrobów. Każdy badany wyrób oceniamy jako zgodny lub niezgodny (wadliwy) z wymaganiami. Określmy zmienną

$$X(\omega) = \begin{cases} \mathbf{1} & \textbf{jeśli } \omega \equiv \textbf{ wyrób jest niezgodny} \\ \mathbf{0} & \textbf{jeśli } \omega \equiv \textbf{ wyrób jest zgodny} \end{cases}$$

Przykład 2 (zmienna ciągła – nieskończony zbiór wartości)
Badaniu podlega roczny zysk różnych firm. Firmy pobierane są do badań w sposób losowy. Zmienna losowa ***X*** przyjmuje dowolne wartości rzeczywiste (model !!!), przy czym dla poszczególnych wylosowanych firm wartości te są na ogół różne.

Przykład 3 (zmienna skokowa – nieskończony, ale przeliczalny zbióór wartości)
Operator telefonicznej sieci komórkowej analizuje dzienną liczbę połączeń. Niech $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,......\}$ gdzie ω_ι oznacza zdarzenie elementarne polegające na zaobserwowaniu ***i*** połączeń. Dzienna liczba połączeń opisana jest zmienną losową

$$X(\omega_i) = i, \quad i = 0,1,2,\ldots$$

Rozkład prawdopodobieństwa

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej *X* jest funkcją, która każdemu podzbiorowi możliwych wartości tej zmiennej przypisuje liczbę z domkniętego przedziału [0,1].

Rozkład prawdopodobieństwa jest jednoznacznie określony funkcją, którą nazywamy **dystrybuantą** zmiennej losowej *X* definiowaną jako

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\}) = P(X < x)$$

Własności dystrybuanty:

1. $0 \le F(x) \le 1,$ **dla dowolnych** $x \in \mathcal{R}$
2. $F(-\infty) = 0, \quad F(\infty) = 1$
3. $F(x) \le F(y),$ **jeśli tylko** $x < y$
4. $F(x^-) = F(x),$ **gdzie** $F(x^-)$ **oznacza granicę lewostronną** F **w punkcie** x **(ciągłość lewostronna)**

Uwaga: Jeśli jakaś funkcja ***F*** ma własności 1) - 4), to jest ona dystrybuantą jakiejś zmiennej losowej

Dystrybuanta <u>dyskretnej (skokowej)</u> zmiennej losowej *X* dana jest zależnością:

$$\boldsymbol{F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)}$$

gdzie

$\boldsymbol{P(X = x_i) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i\}) = p_i}$, **dla** $\boldsymbol{x_i \in W}$

$\boldsymbol{\sum_i p_i = 1}$,

jest tzw. **<u>funkcją prawdopodobieństwa</u>.**

Dystrybuanta <u>ciągłej</u> zmiennej losowej *X* dana jest zależnością:

$$\boldsymbol{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx}$$

gdzie **nieujemna funkcja *f*(*x*), określona i całkowalna do jedynki na całej osi** jest **<u>funkcją gęstości (gęstością)</u>** zmiennej losowej ***X***.

Przykłady rozkładów prawdopodobieństwa

a) Rozkład dwupunktowy

$$X = \begin{cases} 0, & \textbf{zdarzenie nie zaszło} \\ 1, & \textbf{zdarzenie zaszło} \end{cases}$$

$$P(X = 1) = p, \quad P(X = 0) = 1 - p, \quad 0 \le p \le 1$$

b) Rozkład dwumianowy (Bernouillego)

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{k}) = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{k}} \mathrm{p}^{\mathrm{k}} (1 - \mathrm{p})^{\mathrm{n-k}}, \quad 0 \le \mathrm{p} \le 1, \quad \mathrm{k} = 0,1,\ldots,\mathrm{n}$$

gdzie

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$n! = 1 * 2 * \cdots * (n-1) * n, \quad 0! = 1$$

c) Rozkład Poissona

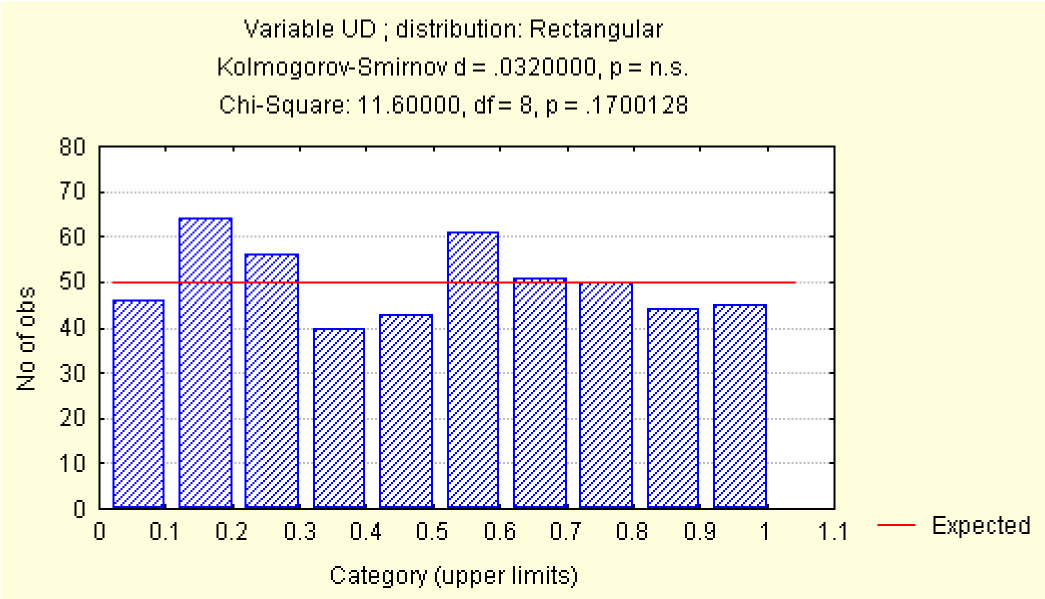
$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad k = 0,1,\ldots$$

d) Rozkład geometryczny

$$P(X = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1,2,\ldots$$

e) Rozkład jednostajny (równomierny).

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \mathbf{1}, & \mathbf{0 \le x \le 1} \\ \mathbf{0}, & \mathbf{x < 0} \text{ lub } \mathbf{x > 1} \end{cases}$$

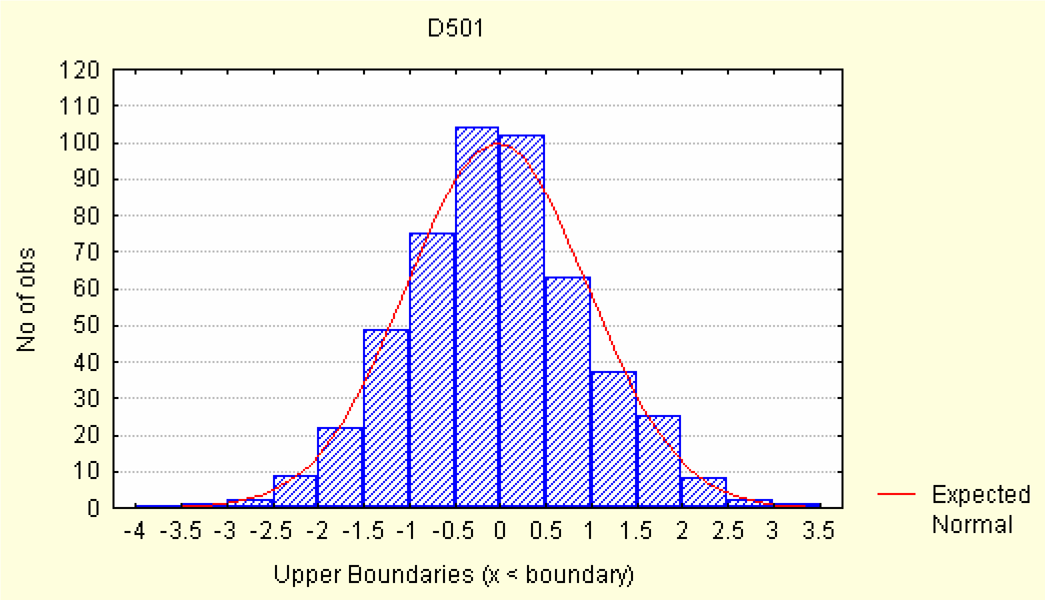


f) Rozkład normalny (Gaussa)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \sigma > 0$$

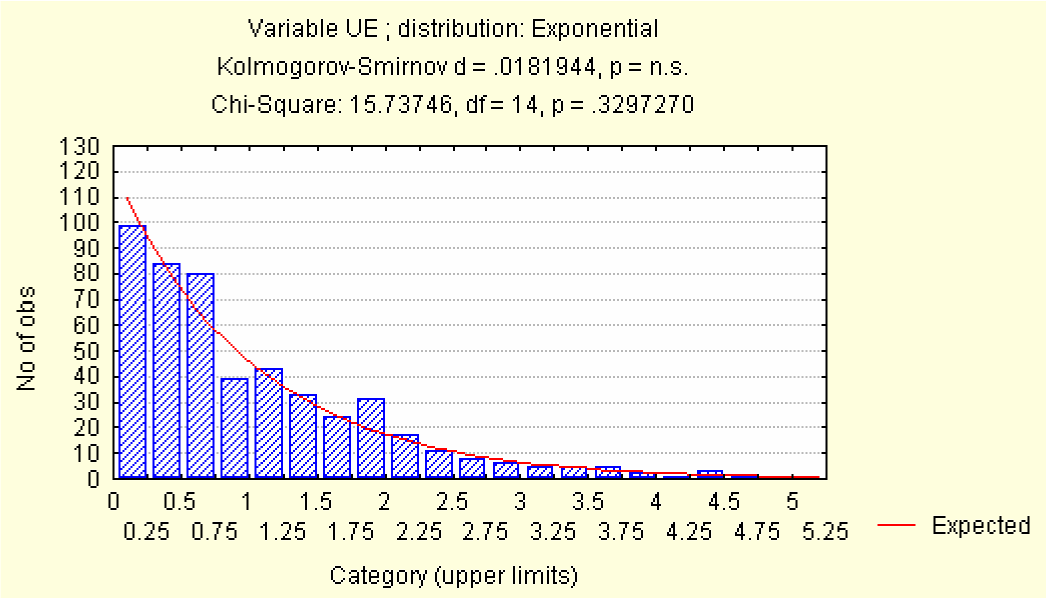
$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right) dz$$



g) Rozkład wykładniczy

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$



Charakterystyki liczbowe (*parametry)* rozkładów zmiennych losowych

Wartość oczekiwana

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(X = x_i)$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

Wariancja

$$\mathbf{V(X) = \sum_{i=1}^{n} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)}$$

$$\mathbf{V(X) = \sum_{i=1}^{\infty} [x_i - E(X)]^2 P(X = x_i)}$$

$$\mathbf{V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx}$$

$$\mathbf{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

Odchylenie standardowe

$$\sigma_X = \sigma = \sqrt{V(X)}$$

Wnioskowanie statystyczne o zjawiskach losowych

<u>Przestrzeń statystyczna</u>

Niech Ω oznacza przestrzeń zdarzeń elementarnych związanych z jakimś **eksperymentem losowym**. Wynik eksperymentu losowego możemy opisać trójką $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ zwaną **przestrzenią statystyczną,** gdzie $\mathcal{P}=\{P_\theta, \theta \in \Theta\}$ jest **rodziną rozkładów prawdopodobieństwa** opisującą wynik eksperymentu., a Θ jest jakąś przestrzenią parametrów.

Zazwyczaj **nie znamy** rodziny rozkładów prawdopodobieństwa opisujących dany eksperyment losowy. Dokonujemy jednak często pewnego **założenia**, że jest to rodzina określonego typu (np. rodzina rozkładów normalnych) indeksowana parametrem, którego wartość należy do pewnej przestrzeni $\Theta \subseteq \mathcal{R}^k$. Mówimy wówczas, że eksperyment opisany jest *k-wymiarowym* <u>*modelem* ***parametrycznym***</u>.

Jeżeli nie precyzujemy rodziny rozkładów prawdopodobieństwa (przestrzeń Θ nie może być przedstawiona jako podzbiór $\mathcal{R}^k$), to mówimy, że eksperyment opisany jest <u>*modelem* ***nieparametrycznym***</u>.

Eksperyment statystyczny

X - obserwowana zmienna losowa

Obserwujemy **próbę losową o liczności n elementów.**

$$X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$$

Jeżeli tworzące próbę zmienne losowe $X_1, X_2, \ldots\ldots X_n$ są *niezależne* i mają *ten sam rozkład*, to taką próbę nazywamy **próbą losową prostą.**

Niech $T = t(X_1, X_2, \ldots\ldots X_n)$ będzie pewną funkcją, której argumentami będą wyniki eksperymentu losowego. Funkcję tę będziemy nazywać **statystyką**.

Ponieważ wyniki eksperymentu losowego są **zmiennymi losowymi** każda **statystyka** jest też **zmienną losową** o rozkładzie prawdopodobieństwa uzależnionym od rozkładu prawdopodobieństwa obserwowanej zmiennej losowej X.

Przykłady statystyk

a) Średnia

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

b) Wariancja

Jeżeli wartość θ jest **nieznana,** to *wariancją* nazywamy statystykę

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}_n\right)^2$$

Zadania statystyki

Estymacja punktowa parametrów rozkładu prawdopodobieństwa

Estymacja punktowa - oszacowanie nieznanego parametru θ na podstawie **obserwacji** uzyskanych w rezultacie wykonania eksperymentu losowego. Oszacowanie podane jest jako **konkretna** wartość $\theta \in \Theta$.

Niech $\boldsymbol{T=t(X_1,X_2,\ldots\ldots X_n)}$ będzie pewną funkcją, której argumentami będą wyniki eksperymentu losowego. Zakładamy, że obserwowana w eksperymencie zmienna losowa $\boldsymbol{X}$ ma rozkład prawdopodobieństwa zależny od pewnego parametru $\theta \in \Theta$.

Każdą statystykę $T=t(X_1,X_2,\ldots\ldots X_n)$, która przyjmuje wartości z przestrzeni parametrów Θ będziemy nazywać estymatorem parametru $\theta \in \Theta$.

Własności estymatorów

a) Zgodność

Niech $\boldsymbol{X_1, X_2, ...}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie zależnym od parametru rzeczywistego $\theta \in \Theta$. Niech $\boldsymbol{\theta_n = \theta_n(X_1, X_2, ... X_n)}$ będzie estymatorem parametru $\theta \in \Theta$ otrzymanym na podstawie obserwacji próby losowej $\boldsymbol{X_1, X_2, ... X_n}$.

Mówimy, że **estymator** $\boldsymbol{\theta_n}$ **jest zgodny**, jeżeli dla każdego **ε>0**

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\left|\theta_n - \theta\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

Własność zgodności oznacza, że dla dostatecznie dużych liczności próby estymator przyjmuje z dużym prawdopodobieństwem wartości bliskie estymowanemu parametrowi θ.

b) Nieobciążoność

Niech $\theta_n=\theta_n(X_1,X_2,...X_n)$ będzie estymatorem parametru $\theta \in \Theta$ otrzymanym na podstawie obserwacji próby losowej $X_1,X_2,...X_n$.. Jeżeli

$$E(\theta_n((X_1,X_2,\ldots X_n)) = \theta$$

to mówimy, że **estymator** θ_n jest **nieobciążony.**

Obciążeniem estymatora θ_n nazywamy wielkość $b(\theta) = E(\theta_n) - \theta$.

Jeżeli dla każdego $\theta \in \Theta$ obciążenie estymatora θ_n dąży do zera, przy $n\to\infty$, to estymator θ_n będziemy nazywać estymatorem **asymptotycznie nieobciążonym.**

c) Efektywność

Może być wiele estymatorów danego parametru θ, a spośród nich może być wiele estymatorów *nieobciążonych*. Estymatory te możemy porównywać między sobą porównując ich *wariancje.*

Estymator nieobciążony o **najmniejszej wariancji,** o ile taki istnieje, nazywamy **estymatorem efektywnym**.

Jeżeli własność efektywności uzyskujemy wtedy, gdy $n\to\infty$, to nieobciążony estymator θ_n będziemy nazywać estymatorem **asymptotycznie efektywnym.**

Estymacja metodą największej wiarogodności

Estymujemy nieznany parametr θ rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X. Przez $p(x,\theta)$ oznaczmy odpowiednio gęstość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej X, w przypadku, gdy jest ona typu ciągłego, albo też funkcję prawdopodobieństwa, w przypadku, gdy zmienna losowa X jest typu skokowego.
W przypadku obserwacji zmiennej losowej X w próbie losowej o liczności n tworzymy następującą **funkcję wiarogodności** eksperymentu

$$L(X_1, X_2, \ldots, X_n, \theta) = p(X_1, \theta) \cdot p(X_2, \theta) \cdots p(X_n, \theta)$$

Poszukujemy takiego estymatora $\hat{\theta}$ nieznanego parametru θ, **dla którego funkcja wiarogodności osiąga największą wartość.**

Uzyskane w ten sposób estymatory nieznanych parametrów rozkładu prawdopodobieństwa nazywamy <u>estymatorami największej wiarogodności.</u> Są one przynajmniej <u>asymptotycznie nieobciążone</u> oraz <u>asymptotycznie najefektywniejsze</u>.

Estymatory największej wiarogodności parametrów <u>rozkładu normalnego</u>

$$\hat{\mu} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\hat{\sigma} = S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{\mu}\right)^2}{n}}$$

Estymatorem **wariancji** σ^2 w rozkładzie normalnym jest

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{\mu}\right)^2}{n}$$

Można wykazać, że

$$E\left(\hat{\sigma}^2\right) = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Wobec tego, można uzyskać *skorygowany* estymator wariancji w rozkładzie normalnym

$$\hat{\sigma}_0^2 = S_0^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{\mu}\right)^2}{n-1},$$

który jest estymatorem *nieobciążonym* wariancji σ^2.

W przypadku konieczności oceny odchylenia standardowego korzystamy ze **skorygowanego odchylenia standardowego w próbie**

$$\hat{\sigma}_0 = S_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \hat{\mu}\right)^2}{n-1}}$$

jako estymatora parametru σ.

Estymator $\hat{\mu}$ jest nieobciążonym estymatorem parametru μ, natomiast estymator $\hat{\sigma}_0$ jest obciążonym estymatorem parametru σ. Obciążenie to jest funkcją liczności próby n i maleje do zera, gdy *n* dąży do nieskończoności.

Estymacja przedziałowa parametrów rozkładów prawdopodobieństwa

Przedziały ufności

Niech będzie dana *próba losowa* $(X_1,X_2,....,X_n)$, której rozkład zależy od pewnego parametru rzeczywistego $\theta \in \Theta$. **Przedziałem ufności** dla parametru $\theta \in \Theta$ **na poziomie ufności** β $(0<\beta<1)$ nazywamy przedział (θ_1,θ_2), spełniający warunki:

- $\theta_1 = \theta_1(X_1,X_2,....,X_n)$ oraz $\theta_2 = \theta_2(X_1,X_2,....,X_n)$ są funkcjami próby losowej $(X_1,X_2,....,X_n)$, które *nie zależą* od θ;
- dla każdego $\theta \in \Theta$,

$$P\big(\theta_1(X_1,\ldots,X_n) < \theta < \theta_2(X_1,\ldots,X_n)\big) = \beta$$

Granice przedziału losowego (θ_1,θ_2) są **zmiennymi losowymi,** takimi że **prawdopodobieństwo pokrycia przedziałem (θ_1,θ_2) nieznanego parametru θ wynosi β.**

Oznacza to, że w przypadku wykonania wielu eksperymentów mających na celu oszacowanie przedziałowe parametru θ w 100β% przypadkach wyznaczony przedział ufności będzie zawierał θ.

Istnieje **wiele** przedziałów ufności spełniających powyższe warunki. Interesuje nas zawsze znalezienie takiego przedziału, którego **długość**

$$l_n = \theta_2(X_1,X_2,....,X_n) - \theta_1(X_1,X_2,....,X_n)$$

jest **najmniejsza**.

Weryfikacja hipotez statystycznych

(testowanie hipotez statystycznych)

Hipotezy statystyczne

Niech będzie dana *przestrzeń statystyczna* **$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$,** gdzie $\mathcal{P}=\{P_\theta, \theta\in\Theta\}$ jest **rodziną rozkładów prawdopodobieństwa** opisującą wynik eksperymentu, a Θ jest jakąś przestrzenią parametrów przy czym $\Theta_1\cup\Theta_2=\Theta$, $\Theta_1\cap\Theta_2=\varnothing$.

Stwierdzenie (**hipotezę statystyczną)** $\theta\in\Theta_1$ **będziemy nazywać hipotezą zerową** i będziemy zapisywać

H: $\theta\in\Theta_1$,

zaś stwierdzenie (**hipotezę statystyczną)** $\theta\in\Theta_2$ **będziemy nazywać hipotezą alternatywną** (dla hipotezy ***H***) i będziemy zapisywać

K: $\theta\in\Theta_2$.

Hipotezę statystyczną nazywamy **prostą**, gdy zbiory Θ_2 oraz Θ_2 zawierają dokładnie po **jednym elemencie,** w przeciwnym razie mówimy o hipotezie **złożonej**.

Test statystyczny

Testem statystycznym nazywamy procedurę postępowania, która możliwym realizacjom próby losowej $(X_1,X_2,...,X_n)$ określonej na przestrzeni statystycznej $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$ przypisuje decyzje odrzucenia (albo przyjęcia) weryfikowanej hipotezy.

W celu zbudowania *testu statystycznego* konstruujemy dwa dopełniające się zbiory W i W' ($W\cap W'=\varnothing$, $W\cup W'=\mathcal{R}$) oraz pewną statystykę $T=\mathrm{T}(X_1,X_2,...,X_n)$ zwaną **statystyką testową.**

Decyzje podejmujemy w następujący sposób:

jeżeli $T=T(X_1,X_2,...,X_n)\in W$, to H odrzucamy;
jeżeli $T=T(X_1,X_2,...,X_n)\notin W$, to H przyjmujemy.

Zbiór W nazywamy *zbiorem krytycznym* (*zbiorem odrzuceń hipotezy* H), a zbiór W' nazywamy *zbiorem przyjęć.*

Jeżeli weryfikowaną hipotezę nie odrzucamy, to bezpieczniej jest powiedzieć, *że nie ma podstaw do jej odrzucenia*, niż mówić o przyjęciu hipotezy alternatywnej.

Błędy decyzji statystycznych

- odrzucamy weryfikowaną hipotezę ***H***, gdy jest ona *prawdziwa*; jest to tzw. **błąd pierwszego rodzaju;**
- przyjmujemy weryfikowaną hipotezę ***H***, gdy jest ona *fałszywa*; jest to tzw. **błąd drugiego rodzaju.**

Błędne decyzje statystyczne podejmowane są z określonymi prawdopodobieństwami nazywanymi, odpowiednio, ***prawdopodobieństwem błędu pierwszego rodzaju*** oraz ***prawdopodobieństwem błędu drugiego rodzaju***.

Zwykle ustalamy dopuszczalną wielkość prawdopodobieństwa błędu pierwszego rodzaju, którą nazywamy **poziomem istotności** α**.** Wśród testów spełniających wymaganie określone poziomem istotności poszukujemy takiego, by zminimalizowane zostało prawdopodobieństwo błędu drugiego rodzaju.

Testy zgodności

Testy zgodności służą do weryfikacji hipotez *o postaci rozkładu prawdopodobieństwa*.
Na podstawie wyników badania próby losowej $\boldsymbol{X_1, X_2, ..., X_n}$, której elementy mają rozkład prawdopodobieństwa o dystrybuancie $\boldsymbol{F}$ weryfikujemy hipotezę

$$\boldsymbol{H:\ F = F_0}$$

gdzie $\boldsymbol{F_0}$ jest zadaną dystrybuantą.
Testy zgodności są na ogół *testami nieparametrycznymi*, gdyż alternatywa ma zwykle postać: $\boldsymbol{K:\ F \neq F_0}$.

Test zgodności chi-kwadrat Pearsona

Przyjmijmy, że wyniki obserwacji próby losowej *zostały pogrupowane w **k** rozłącznych klas*, o licznościach $n_1, n_2, ..., n_k$, przy czym $n_1+n_2+...+n_k=n$. Należy teraz przyjąć założony rozkład prawdopodobieństwa i dla tego rozkładu **wyznaczyć prawdopodobieństwa $p_1, p_2, \ldots, p_k$, że obserwowana zmienna losowa przyjmie wartość z danej klasy.**

$$\chi_P^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i)^2}{np_i}$$

Jeżeli spełniony jest warunek **min($n_1, n_2, ..., n_k$)>5 i liczność próby jest duża (np. $n \geq 100$),** to w przypadku słuszności weryfikowanej hipotezy rozkład prawdopodobieństwa statystyki χ_P^2 jest **rozkładem chi-kwadrat o k-1 stopniach swobody.**

Hipotezę o zgodności obserwacji z założonym rozkładem prawdopodobieństwa *odrzucamy,* gdy $\chi_P^2 > \chi_{1-\alpha,k-1}$ gdzie $\chi_{1-\alpha,k-1}^2$ jest kwantylem rzędu 1-α w rozkładzie chi-kwadrat o k-1 stopniach swobody (tablice).

Test zgodności Kołmogorowa

Test zgodności Kołmogorowa wykorzystuje się w przypadku weryfikowania hipotez dla **rozkładów zmiennych losowych ciągłych**.
Niech $\boldsymbol{F_0(s)}$ będzie założoną dystrybuantą (hipotetyczną), a $\boldsymbol{F_n(s)}$ zaobserwowaną w próbie losowej $\boldsymbol{X_1, X_2, \dots, X_n}$ **dystrybuantą empiryczną.**

$$\boldsymbol{F_n(s) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,s)}(X_i)}$$

Statystyką testową jest **statystyka Kołmogorowa**

$$\boldsymbol{D_n = \sup_{-\infty<s<\infty} \left| F_n(s) - F_0(s) \right|}$$

Hipotezę o zgodności z założonym rozkładem prawdopodobieństwa odrzuca się, gdy zachodzi nierówność

$$\boldsymbol{D_n > d_n(1-\alpha)},$$

gdzie $\boldsymbol{d_n(1-\alpha)}$ jest kwantylem rzędu $\boldsymbol{1-\alpha}$ (stablicowanym) rozkładu prawdopodobieństwa statystyki $\boldsymbol{D_n}$.

Dla dużych liczności próby $\boldsymbol{n \geq 100}$ hipotezę o zgodności z założonym rozkładem prawdopodobieństwa odrzuca się, gdy zachodzi nierówność $\boldsymbol{D_n > \lambda_{1-\alpha} / \sqrt{n}}$, gdzie $\lambda_{1-\alpha}$ jest kwantylem rzędu $1-\alpha$ (stablicowanym) rozkładu prawdopodobieństwa statystyki ***λ-Kołmogorowa.***

Związek weryfikacji hipotez statystycznych z estymacją przedziałową

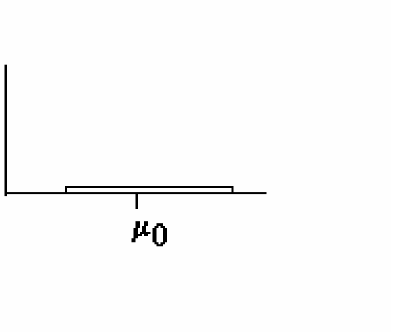
Hipotezy statystyczne weryfikuje się (testuje) na poziomie istotności α. **Przy budowie testu można wykorzystać pojęcie przedziału ufności.**

Hipotezę statystyczną na danym poziomie istotności α weryfikuje się porównując hipotetyczną (wymaganą) wartość parametru rozkładu prawdopodobieństwa z wyznaczonym na podstawie obserwacji z próbki **PRZEDZIAŁEM UFNOŚCI** na poziomie ufności $\beta = 1 - \alpha$ dla tego parametru.

Weryfikacja hipotezy typu *H:* $\mu = \mu_0$.

Przyjęcie hipotezy: $\mu_0 \in (\mu_1, \mu_2)$
Odrzucenie hipotezy: $\mu_0 \in \{(-\infty, \mu_1) \cup (\mu_2, \infty)\}$

Wykorzystujemy **dwustronny** przedział ufności dla parametru μ na poziomie ufności β



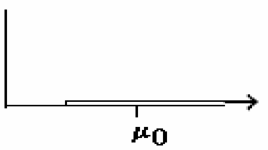
Weryfikacja hipotezy typu *H:* $\mu \leq \mu_0$.

Hipoteza ta jest równoważna następującemu problemowi decyzyjnemu:

H: $\mu = \mu_0$ ***K:*** $\mu > \mu_0$

Przyjęcie hipotezy: $\mu_0 \in (\mu_d, \infty)$
Odrzucenie hipotezy: $\mu_0 \notin (\mu_d, \infty)$

Wykorzystujemy **jednostronny (górny)** przedział ufności dla parametru μ na poziomie ufności β



Weryfikacja hipotezy typu *H:* $\mu \geq \mu_0$.

Hipoteza ta jest równoważna następującemu problemowi decyzyjnemu:

H: $\mu = \mu_0$ ***K:*** $\mu < \mu_0$

Przyjęcie hipotezy: $\mu_0 \in (-\infty, \mu_g)$
Odrzucenie hipotezy: $\mu_0 \notin (-\infty, \mu_g)$

Wykorzystujemy **jednostronny (dolny)** przedział ufności dla parametru μ na poziomie ufności β