PROGRAMOWANIE LINIOWE.
ZASTOSOWANIA EKONOMICZNE.
CENY DUALNE. ANALIZA WRAŻLIWOŚCI.

1. RACHUNEK EKONOMICZNY. ZASADY RACJONALNEGO GOSPODAROWANIA.

Rachunek ekonomiczny - porównanie efektów i nakładów w celu wyboru optymalnego (najbardziej efektywnego ekonomicznie) rozwiązania wśród dopuszczalnych wariantów rozwiązań

Dwie **zasady racjonalnego gospodarowania:**

- Maksymalizacja efektów przy zadanych nakładach (z ograniczeniami dotyczącymi nakładów)
- Minimalizacja nakładów przy zadanych efektach (z ograniczeniami dotyczącymi efektów)

2. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ EKONOMICZNYCH

Ekonomiczne problemy decyzyjne, które można przedstawić w postaci zadania programowania liniowego:

- wyznaczenie optymalnego planu produkcji
- wybór procesów technologicznych
- układanie harmonogramu realizacji przedsięwzięć inwestycyjnych
- dobór diety
- obsada stanowisk pracy
- zadania transportowe i sprowadzalne do zadania transportowego: zadanie transportowo-produkcyjne, wybrane zagadnienia lokalizacji produkcji, minimalizacja pustych przebiegów

Irena Woroniecka
Wydział Informatycznych Technik Zarządzania
Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania

- lokalizacja ośrodka dystrybucji
- optymalne gospodarowanie zapasami
- wyznaczenie kanałów obsługi
- wybór wariantu inwestycyjnego

3. ZADANIE PRODUKCYJNE

Zadanie produkcyjne – wyznaczenie optymalnego planu produkcji (wybór rozmiarów i struktury produkcji w przedsiębiorstwie)

Zmienną decyzyjną jest: x_j – wielkość produkcji j-tego asortymentu ($j=1, \ldots, n$)

Parametrami zadania są:

c_j – jednostkowy zysk ze sprzedaży asortymentu j

a_{ij} – nakład i-tego czynnika produkcji (środka produkcji) niezbędny do wytworzenia jednostki produkcji asortymentu j

b_i – zasób i-tego środka produkcji, którym dysponuje przedsiębiorstwo ($i=1, \ldots, m$), np. pracy, energii, surowców.

Poszukujemy planu produkcji, maksymalizującego przychody ze sprzedaży, przy ograniczonych zasobach środków produkcji:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max & \text{maksymalizacja zysku ze sprzedaży} \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,\ldots,m) & \text{nakłady środków produkcji} \\ & \text{ograniczone przez zasoby} \\ x_j \geq 0 \quad (j=1,\ldots,n) & \end{cases}$$

W zapisie macierzowym::

$$\begin{cases} \mathbf{cx} \rightarrow \max \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

gdzie:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

4. ZADANIE TRANSPORTOWE

Zadanie transportowe – wyznaczanie optymalnego planu transportu jednorodnego towaru między dostawcami a odbiorcami (*m* dostawców, *n* odbiorców)

Zmienną decyzyjną jest: x_{ij} – ilość towaru dostarczana przez dostawcę i odbiorcy j

Parametrami zadania są:

c_{ij} – koszt transportu jednostki towaru od dostawcy i do odbiorcy j

a_i – ilość towaru jaką dysponuje dostawca i (i =1, …, m)

b_j – zapotrzebowanie na towar odbiorcy j (j = 1, …, n)

Poszukujemy planu przewozu minimalizującego koszty transportu:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \rightarrow \min$$ minimalizacja kosztów transportu

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad (i = 1,\ldots,m)$$ ilość towaru wysyłana przez dostawcę do wszystkich odbiorców jest ograniczona przez posiadaną przez niego ilość towaru

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \ge b_j \quad (j = 1,\ldots,n)$$ ilość towaru dostarczona do odbiorcy przez wszystkich dostawców powinna zaspokajać popyt dostawcy

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1,\ldots,m, \ \ j = 1,\ldots,n)$$

Zadanie transportowe zapisane w postaci standardowej:

$$
\begin{cases}
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \rightarrow \quad \min \\
-\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \;\geq\; -a_i \quad (\, i = 1,\ldots,m \,) \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \;\geq\; b_j \quad (\, j = 1,\ldots,n \,) \\
x_{ij} \;\geq\; 0 \quad (\, i = 1,\ldots,m,\;\; j = 1,\ldots,n \,)
\end{cases}
$$

5. CENY DUALNE. INTERPRETACJA EKONOMICZNA.

Pierwotne i dualne zadanie programowania liniowego

Zadanie pierwotne programowania liniowego:

$$
\begin{cases}
\mathbf{cx} \rightarrow \max \\
\mathbf{A\,x} \;\leq\; \mathbf{b} \\
\mathbf{x} \;\geq\; \mathbf{0}
\end{cases}
$$

Zadanie dualne:

$$
\begin{cases}
\mathbf{b}'\,\mathbf{y} \rightarrow \min \\
\mathbf{A}'\,\mathbf{y} \;\geq\; \mathbf{c}' \\
\mathbf{y} \;\geq\; \mathbf{0}
\end{cases}
$$

gdzie: $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

Irena Woroniecka
Wydział Informatycznych Technik Zarządzania
Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania

Własności zadania programowania liniowego – pierwotnego i dualnego

- W zadaniu dualnym jest tyle zmiennych, ile nierówności w zadaniu pierwotnym (i *vice versa*).
- Wagi w funkcji celu zadania pierwotnego są wyrazami wolnymi układu nierówności zadania dualnego (i na odwrót).
- Macierz współczynników układu nierówności w zadaniu dualnym jest transpozycją macierzy współczynników układu nierówności w zadaniu pierwotnym (i *vice versa*).
- Zadaniem dualnym względem zadania dualnego jest zadanie pierwotne.

Wybrane twierdzenia o dualności (przy założeniu, że oba zadania są niesprzeczne):

- Dla dowolnych rozwiązań dopuszczalnych zadania pierwotnego i dualnego:

$$\mathbf{c}\,\mathbf{x} \le \mathbf{b}'\mathbf{y}$$

- Zadania pierwotne i dualne mają rozwiązania optymalne: **x*** i **y***. Są to takie i tylko takie rozwiązania, przy których wartości funkcji celu obu zadań są równe:

$$\mathbf{c}\,\mathbf{x}^* = \mathbf{b}'\mathbf{y}^*$$

Zmiennymi dualnymi y_i są **ceny dualne**, interpretowane jako ceny środków produkcji i=1, 2, …, m, które ustaliłyby się w warunkach konkurencji.

Pytanie: Po jakich cenach firma konkurencyjna byłaby skłonna odkupić od naszej firmy środki produkcji?

Oto zadanie wyznaczenia cen zakupu środków produkcji z punktu widzenia firmy kupującej:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} y_i b_i \rightarrow \min & \text{minimalizacja kosztów zakupu} \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j \quad (j = 1,\ldots,n) & \text{warunek opłacalności sprzedaży środków produkcji przez dysponenta} \\ y_i \ge 0 \quad (i = 1,\ldots,m) & \end{cases}$$

Interpretacja cen dualnych

Cena dualna y_i - informuje o ile poprawiłaby się wartość funkcji celu, jeśli zasób *i*-tego środka produkcji wzrósłby o jednostkę. Oznacza przyrost zysku, jaki dysponent zasobów mógłby dodatkowo osiągnąć, dokupując jednostkę *i*-tego środka produkcji.

6. DUALNE ZADANIE TRANSPORTOWE

Pierwotne zadanie transportowe:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \to \quad \min \\ -\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \;\geq\; -a_i \quad (\, i = 1,\dots,m\,) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \;\geq\; b_j \quad (\, j = 1,\dots,n\,) \\ x_{ij} \;\geq\; 0 \quad (\, i = 1,\dots,m,\;\; j = 1,\dots,n\,) \end{cases}$$

Dualne zadanie transportowe:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i \quad \to \quad \max \\ \beta_j - \alpha_i \;\leq\; c_{ij} \quad (\, i = 1,\dots,m,\;\; j = 1,\dots,n\,) \\ \beta_j \;\geq\; 0 \quad (\, j = 1,\dots,n\,) \\ \alpha_i \;\geq\; 0 \quad (\, i = 1,\dots,m\,) \end{cases}$$

Ceny dualne: α_i oraz β_j oznaczają ceny towaru, jakie ukształtowałyby się w warunkach konkurencji na rynku: dostawcy-pośrednicy-odbiorcy. Ceny α_i to ceny, po których firma handlowo-transportowa chce zakupić towar u dostawców i sprzedać go odbiorcom po cenach β_j.

Zadanie dualne, to zadanie, które rozwiązuje wspomniana firma handlowo-transportowa w warunkach konkurencji, postępując racjonalnie z punktu widzenia własnych korzyści i uwzględniając racjonalne zachowanie dostawców towaru. Maksymalizuje ona całkowitą marżę, jaką realizuje; jest to nadwyżka wartości towaru w cenach sprzedaży odbiorcom nad wartością towaru w cenach zakupu od dostawców.

Ograniczenie odzwierciedla warunek opłacalności transakcji z punktu widzenia dostawców. Marża za sprzedaż i transport jednostki towaru pochodzącego od dostawcy i do odbiorcy j nie może przekraczać jednostkowych kosztów transportu, w przeciwnym razie dostawcy nie opłaca się korzystać z pośrednictwa firmy transportowej i woli sam dostarczać towar odbiorcom.

Interpretacja cen dualnych w zadaniu transportowym:

Cena dualna β_j - informuje o ile zmniejszyłyby się całkowite koszty transportu, gdyby j-ty odbiorca zmniejszył swoje zapotrzebowanie na towar o jednostkę.

Cena dualna α_i - informuje o ile zmniejszyłyby się całkowite koszty transportu, gdyby i-ty dostawca dysponował jedną jednostką towaru więcej.

Irena Woroniecka
Wydział Informatycznych Technik Zarządzania
Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania