

# GRY O SUMIE ZEROWEJ. PUNKT SIODŁOWY

## 1. GRA O SUMIE ZEROWEJ

**W grze o sumie zerowej wygrana jednego gracza stanowi przegraną drugiego gracza**, suma ich wypłat jest równa zero. Np., gdy gracz A wybierze decyzję (strategię)  $i$ , a gracz B – decyzję  $j$ , to wartość wygranej gracza A wyniesie  $a_{ij}$ , a wygrana gracza B wyniesie minus  $a_{ij}$ .

		Gracz B							
		$db_1$	...	$db_j$	...	$db_n$	min w wierszu		
Gracz A	$da_1$	$a_{11}$	...	$a_{1j}$	...	$a_{1n}$	$\min_j a_{1j}$	$\max_i \min_j a_{ij}$	
	...	...		...		...	...		
	$da_i$	$a_{i1}$		$a_{ij}$		$a_{in}$	$\min_j a_{ij}$		
	...	...		...		...	...		
	$da_m$	$a_{m1}$	...	$a_{mj}$	...	$a_{mn}$	$\min_j a_{mj}$		
	max w kolumnie	$\max_i a_{i1}$	...	$\max_i a_{ij}$	...	$\max_i a_{in}$			
minimax	$\min_j \max_i a_{ij}$							↑ wypłaty w najgorszym przypadku ←	

Gwarantowana wypłata gracza A =  $\min_j \max_i a_{ij}$

Gwarantowana wypłata gracza B =  $-\max_i \min_j a_{ij}$

### Wartość gry

Dla każdej gry macierzowej, dla której istnieje taka liczba  $v$ , że gracz A ma strategię gwarantującą wygraną co najmniej  $v$ , a gracz B ma strategię gwarantującą, że gracz A wygra nie więcej niż  $v$  (czyli gracz B wygra co najmniej  $-v$ ),  $v$  jest wartością gry.

**2. PUNKT SIODŁOWY**

Wynik gry macierzowej nazywamy **punktem siodłowym**, gdy jego wartość jest najmniejsza w wierszu i największa w kolumnie.

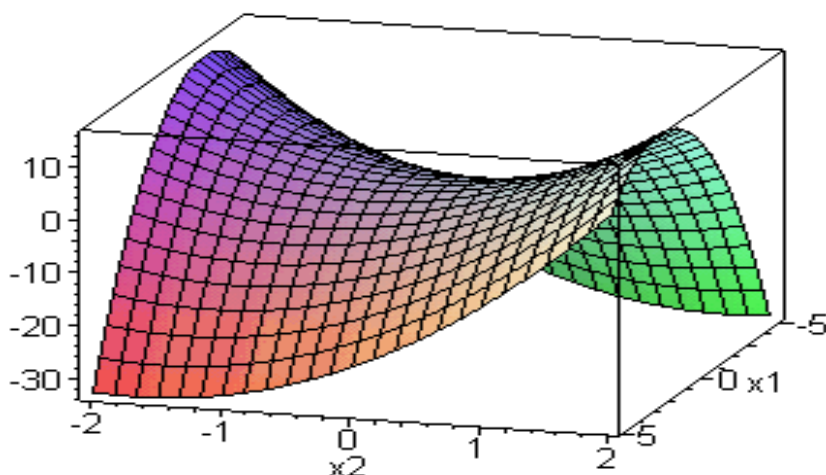
Gdy  $\min_j \max_i a_{ij} = \max_i \min_j a_{ij} = v$ , gra ma punkt siodłowy, a  $v$  jest wartością gry.

Gdy  $\min_j \max_i a_{ij} \neq \max_i \min_j a_{ij}$ , gra nie ma punktu siodłowego.

Wartość wypłaty w punkcie siodłowym jest:

- **maksymalna w kolumnie** – oznacza to, że dla danej strategii gracza B (dla danej kolumny), gracz A wybiera strategię, która stanowi najkorzystniejszą z jego punktu widzenia odpowiedź na posunięcie gracza A – maksymalizuje swoją wypłatę.
- **minimalna w wierszu** – oznacza to, że dla danej strategii gracza A (dla danego wiersza), gracz B wybiera strategię, która stanowi najkorzystniejszą z jego punktu widzenia odpowiedź – maksymalizuje swoją wypłatę, czyli minimalizuje wypłatę przeciwnika (gracza A).

Jeśli obaj gracze grają **strategie będące w równowadze ( w punkcie siodłowym )**, **żadnemu z nich nie opłaca się zmiana strategii.**



**3. PRZYKŁADY**

Gra o sumie zerowej może mieć jeden punkt siodłowy, kilka punktów siodłowych lub w ogóle nie mieć punktu siodłowego.

**Przykład – gra ma 1 punkt siodłowy**

		Gracz B				
		R1	R2	R3	min w wierszu	maximin
Gracz A	S1	-2	0	4	-2	
	S2	2	1	3	1	1
	S3	3	-1	-2	-2	
	max w kolumnie	3	1	4		
	minimax		1			

**Przykład – gra nie ma punktu siodłowego**

		Gracz B			
		R1	R2	min w wierszu	maximin
Gracz A	S1	2	-3	-3	
	S2	0	2	0	0
	S3	-5	10	-5	
	max w kolumnie	2	10		
	minimax	2			

## Przykład – gra ma 2 punkty siodłowe

		Gracz B					
		R1	R2	R3	R4	min w wierszu	maximi n
Gracz A	S1	4	3	2	5	2	2
	S2	-10	2	0	-1	-10	
	S3	7	5	2	3	2	2
	S4	0	8	-4	-5	-5	
	max w kolumnie	7	8	2	5		
	minimax			2			