

FUNKCJE PRODUKCJI.

DODATEK: METODA KMENTY.

1. METODA APROKSYMACJI FUNKCJI CES. METODA J.KMENTY.

Funkcja produkcji CES (Arrow, Chedery, Minhas, Solow) oraz Brown

Funkcja produkcji CES o stałej elastyczności substytucji (*Constant Elasticity of Substitution*) ma następującą postać:

$$Y = \gamma \left(\delta X_1^{-\rho} + (1 - \delta) X_2^{-\rho} \right)^{-\frac{\nu}{\rho}},$$

gdzie:

Y - produkcja

X_1 - pierwszy czynnik produkcji (np. kapitał)

X_2 - drugi czynnik produkcji (np. praca)

γ - parametr efektywności procesu produkcyjnego

δ - współczynnik określający udział obu czynników: X_1 i X_2 w produkcji,
($0 < \delta < 1$)

ν - parametr efektów skali (miara stopnia jednorodności funkcji produkcji)

ρ - parametr substytucji

Współczynnik elastyczności substytucji σ jest stały i równy:

$$\sigma = \frac{1}{1 + \rho}$$

Do estymacji parametrów funkcji CES:

$$Y = \gamma \left(\delta X_1^{-\rho} + (1 - \delta) X_2^{-\rho} \right)^{-\frac{v}{\rho}},$$

można wykorzystać metodę J. Kmenty. Polega ona na rozwinięciu w szereg Taylora zlogarytmizowanej postaci funkcji CES wokół $\rho = 0$ z dokładnością do drugiej pochodnej i estymacji parametrów powstałej w taki sposób funkcji liniowej.

Po zlogarytmizowaniu funkcji CES otrzymujemy następującą postać:

$$\ln Y = \ln \gamma - \frac{v}{\rho} \ln \left[\delta X_1^{-\rho} + (1 - \delta) X_2^{-\rho} \right].$$

Następnie dokonuje się aproksymacji powyższej funkcji rozwijając ją w szereg Taylora z dokładnością do wyrazu drugiego rzędu:

$$f(\rho) = f(0) + \rho f'(0) + \frac{1}{2} \rho^2 f''(0).$$

Wprowadźmy funkcję pomocniczą $h(\rho)$ i przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$f(\rho) = \ln h(\rho) .$$

gdzie:

$$h(\rho) = \delta X_1^{-\rho} + (1 - \delta) X_2^{-\rho} .$$

Wówczas pierwsza pochodna $h'(\rho)$ jest równa:

$$h'(\rho) = - \left[\delta X_1^{-\rho} \ln X_1 + (1 - \delta) X_2^{-\rho} \ln X_2 \right] ,$$

a druga pochodna $h''(\rho)$:

$$h''(\rho) = \delta (\ln X_1)^2 X_1^{-\rho} + (1 - \delta) (\ln X_2)^2 X_2^{-\rho} ,$$

Pochodne $f'(\rho)$ i $f''(\rho)$ są równe odpowiednio:

$$f'(\rho) = \frac{h'(\rho)}{h(\rho)},$$

$$f''(\rho) = \frac{h''(\rho) h(\rho) - [h'(\rho)]^2}{[h(\rho)]^2}.$$

Dla $\rho = 0$ powyższe funkcje przyjmują postać:

$$h(0) = 1,$$

$$h'(0) = -[\delta \ln X_1 + (1 - \delta) \ln X_2],$$

$$h''(0) = \delta (\ln X_1)^2 + (1 - \delta) (\ln X_2)^2,$$

$$f(0) = \ln h(0) = 0,$$

$$f'(0) = \frac{h'(0)}{h(0)} = -[\delta \ln X_1 + (1 - \delta) \ln X_2],$$

$$\begin{aligned} f''(0) &= \frac{h''(0) h(0) - [h'(0)]^2}{[h(0)]^2} = h''(0) - [h'(0)]^2 = \\ &= \delta (\ln X_1)^2 + (1 - \delta) (\ln X_2)^2 - [\delta \ln X_1 + (1 - \delta) \ln X_2]^2 = \\ &= \delta(1 - \delta) (\ln X_1 - \ln X_2)^2. \end{aligned}$$

Z przedstawionych powyżej zależności uzyskuje się następujące przybliżenie dla $f(\rho)$:

$$f(\rho) = -\rho [\delta \ln X_1 + (1-\delta) \ln X_2] + \frac{1}{2} \rho^2 \delta (1-\delta) (\ln X_1 - \ln X_2)^2$$

i tym samym następującą aproksymację logarytmu funkcji CES:

$$\begin{aligned} \ln Y &= \ln \gamma - \frac{\nu}{\rho} f(\rho) = \\ &= \ln \gamma + \nu [\delta \ln X_1 + (1-\delta) \ln X_2] - \frac{\nu \rho}{2} \delta (1-\delta) (\ln X_1 - \ln X_2)^2. \end{aligned}$$

Uzyskaliśmy następującą liniową postać funkcji:

$$\ln Y = \ln \gamma + \nu \delta \ln X_1 + \nu (1-\delta) \ln X_2 - \frac{\nu \rho}{2} \delta (1-\delta) (\ln X_1 - \ln X_2)^2.$$

Metodę MNK można zastosować do estymacji parametrów następującej funkcji:

$$Y' = a_0 + a_1 X_1' + a_2 X_2' + a_3 X_3',$$

gdzie:

$$Y' = \ln Y, \quad X_1' = \ln X_1, \quad X_2' = \ln X_2, \quad X_3' = (\ln X_1 - \ln X_2)^2.$$

$$a_0 = \ln \gamma, \quad a_1 = \nu \delta, \quad a_2 = \nu (1-\delta), \quad a_3 = -0,5 \nu \rho \delta (1-\delta),$$

Parametry funkcji CES obliczane są na podstawie estymatorów parametrów a_i :

$$\gamma = e^{a_0}, \quad \nu = a_1 + a_2, \quad \delta = \frac{a_1}{a_1 + a_2}, \quad \rho = -2 \left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} \right).$$