FUNKCJE PRODUKCJI.
ANALIZA KOSZTÓW I KORZYŚCI SKALI.
MINIMALIZACJA KOSZTÓW PRODUKCJI.

1. FUNKCJE PRODUKCJI: JEDNO- I WIELOCZYNNIKOWE

Funkcja produkcji określa zależność zdolności produkcyjnych *Q* od zaangażowanych w procesie wytwórczym czynników.

funkcja produkcji		
czynniki produkcji	$\rightarrow$	**zdolności produkcyjne**

Zdolności produkcyjne to maksymalne rozmiary produkcji możliwe do osiągnięcia przy danym zasobie czynników produkcji.

Czynniki produkcji:

- **praca**
- **kapitał**
- **ziemia**
- **materiały i surowce**
- **postęp naukowo-techniczny**

Postęp techniczny w zakresie:

- produktu (nowe produkty)
- procesu produkcyjnego (nowe technologie)

Postęp techniczny: • pracooszczędny • kapitałochłonny • neutralny

Irena Woroniecka
Wydział Informatycznych Technik Zarządzania
Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania

Dwuczynnikowa funkcja produkcji (zależność zdolności produkcyjnych *Q* od dwóch głównych czynników: pracy (*L*) i kapitału (*K*):

$$\boxed{Q = F(K, L)}$$

Podstawowe współczynniki charakteryzujące efektywność produkcji:

Przeciętne:

przeciętna produktywność (wydajność) pracy $AP_L = Q / L$

oznacza wielkość produkcji (zdolności wytwórczych) jaką uzyskuje się przeciętnie z jednostki nakładu pracy, informuje o przeciętnej produktywności jednostki nakładu pracy (np. wydajność pracy na jednego zatrudnionego lub na godzinę czasu pracy).

przeciętna pracochłonność produkcji L / Q

oznacza nakład pracy, niezbędny w celu wytworzenia przeciętnie jednostki produkcji (np. zatrudnienie potrzebne do wytworzenia przeciętnie jednostki produktu).

przeciętna produktywność kapitału $AP_K = Q / K$

oznacza wielkość produkcji jaką uzyskuje się przeciętnie z jednostki kapitału, informuje o przeciętnej produktywności jednostki kapitału trwałego.

przeciętna kapitałochłonność produkcji K / Q

oznacza zasób kapitału trwałego, niezbędny w celu wytworzenia przeciętnie jednostki produkcji.

techniczne uzbrojenie pracy $u = K / L$

Krańcowe:

krańcowa produktywność (wydajność) pracy $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L} \quad \left(\frac{\Delta Q}{\Delta L}\right)$

informuje o ile zmieni się wielkość produkcji (zdolności produkcyjnych) w wyniku zmiany nakładu pracy o jednostkę (np. o ile wzrośnie produkcja w wyniku zatrudnienia dodatkowego pracownika).

krańcowa pracochłonność produkcji $\frac{\partial L}{\partial Q} \quad \left(\frac{\Delta L}{\Delta Q}\right)$

informuje o ile muszą wzrosnąć nakłady pracy aby możliwy był wzrost produkcji o jednostkę.

krańcowa produktywność kapitału $MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} \quad \left(\frac{\Delta Q}{\Delta K}\right)$

informuje o ile zmienią się zdolności produkcyjne w wyniku zmiany zasobu kapitału trwałego o jednostkę.

krańcowa kapitałochłonność produkcji $\frac{\partial K}{\partial Q} \quad \left(\frac{\Delta K}{\Delta Q}\right)$

informuje jaki jest niezbędny wzrost zasobu kapitału trwałego w celu zwiększenia zdolności produkcyjnych o jednostkę.

Elastyczność produkcji względem pracy:

elastyczność produkcji względem pracy : $e_i = \dfrac{\dfrac{\partial Q}{Q}}{\dfrac{\partial L}{L}} = \dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial L}}{\dfrac{Q}{L}}$

Elastyczność produkcji względem pracy oznacza procentową zmianę produkcji wywołaną jednoprocentową zmianą nakładu pracy, przy założeniu, że pozostałe czynniki nie zmieniają się. Równa jest stosunkowi krańcowej do przeciętnej produktywności pracy.

Elastyczność produkcji względem kapitału:

elastyczność produkcji względem kapitału : $e_i = \dfrac{\dfrac{\partial Q}{Q}}{\dfrac{\partial K}{K}} = \dfrac{\dfrac{\partial Q}{\partial K}}{\dfrac{Q}{K}}$

Elastyczność produkcji względem kapitału oznacza procentową zmianę produkcji wywołaną jednoprocentową zmianą nakładu kapitału, przy założeniu, że pozostałe czynniki nie zmieniają się. Równa jest stosunkowi krańcowej do przeciętnej produktywności kapitału.

W długookresowej analizie funkcji produkcji zakłada się, że zmianie ulegają oba czynniki, zarówno praca jak i kapitał.

W krótkookresowej analizie funkcji produkcji zakłada się, że kapitał nie ulega zmianie (majątek trwały jest w danym momencie zadany i jego zmiana wymaga inwestycji), analizuje się zatem tylko wpływ czynnika zmiennego (pracy) na wielkość produkcji.

Jednoczynnikowa funkcja produkcji:

$Q = f(L)$

Jednoczynnikowa funkcja produkcji $Q = f(L)$ ma kilka charakterystycznych punktów:

- punkt przegięcia funkcji - **maksimum krańcowej produktywności (wydajności) pracy**
- punkt styczności funkcji z linią prostą poprowadzoną z początku układu osi współrzędnych - **maksimum przeciętnej wydajności pracy**
- punkt **maksimum** funkcji **produkcji** - krańcowa wydajność pracy $MP_L = 0$

W punkcie maksimum przeciętnej produktywności pracy - krańcowa i przeciętna wydajność pracy są równe.

Prawo malejących przychodów:

(prawo malejącej krańcowej produkcyjności pracy)

Począwszy od pewnego poziomu, w wyniku zwiększania nakładów jednego czynnika przy założeniu stałości pozostałych, produkcja rośnie coraz wolniej - przyrosty produkcji uzyskane w wyniku wzrostu nakładów czynnika zmiennego o kolejne jednostki są coraz mniejsze. Krańcowa produkcyjność tego czynnika maleje.

Ponieważ przyjmuje się, że zmiennym czynnikiem wytwórczym jest praca, to:

W wyniku zwiększania nakładów pracy produkcja, począwszy od pewnego poziomu, rośnie coraz wolniej - przyrosty produkcji uzyskane w wyniku wzrostu nakładów pracy o kolejne jednostki są coraz mniejsze. Krańcowa produkcyjność pracy maleje.

Jeśli nakłady pracy mierzymy liczbą zatrudnionych, prawo to możemy sformułować następująco: **Każdy kolejny zatrudniony pracownik przyczynia się do wzrostu produkcji w stopniu mniejszym niż poprzedni.**

Wieloczynnikowa funkcja produkcji:

$$Q = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Elastyczność produkcji względem dowolnego czynnika X_i :

elastyczność produkcji względem czynnika X_i : $$e_i = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial X_i}{X_i}} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial X_i}}{\frac{Q}{X_i}}$$

Elastyczność produkcji względem czynnika X_i oznacza procentową zmianę produkcji wywołaną jednoprocentową zmianą nakładu czynnika X_i , przy założeniu, że pozostałe czynniki nie zmieniają się. Równa jest stosunkowi krańcowej do przeciętnej produktywności *i*-tego czynnika.

przeciętna produktywność *i*-tego czynnika $$AP_i = \frac{Q}{X_i}$$

oznacza wielkość produkcji jaką uzyskuje się przeciętnie z jednostki nakładu *i*-tego czynnika.

krańcowa produktywność *i*-tego czynnika $$MP_i = \frac{\partial Q}{\partial X_i} \quad \left(\frac{\Delta Q}{\Delta X_i} \right)$$

informuje o ile zmieni się wielkość produkcji (zdolności produkcyjnych) w wyniku zmiany nakładu *i*-tego czynnika o jednostkę.

2. ANALIZA KORZYŚCI SKALI

Uchylamy założenie, że kapitał jest czynnikiem produkcji, który nie ulega zmianie. W długim okresie zmieniają się (dostosowują się do warunków rynkowych) wszystkie czynniki produkcji.

Przychody skali:

- stałe: $Q(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) = \lambda Q(X_1, \dots, X_n) \qquad \lambda \geq 1$
- rosnące: $Q(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) > \lambda Q(X_1, \dots, X_n) \qquad \lambda \geq 1$
- malejące: $Q(\lambda X_1, \dots, \lambda X_n) < \lambda Q(X_1, \dots, X_n) \qquad \lambda \geq 1$

Całkowita elastyczność produkcji względem nakładów (suma elastyczności) jest definiowana jako procentowa zmiana wielkości produkcji wywołana jednoprocentową zmianą nakładów wszystkich czynników wytwórczych.

- przy stałych przychodach skali suma elastyczności = 1
- przy rosnących przychodach skali suma elastyczności > 1
- przy malejących przychodach skali suma elastyczności < 1

Korzyści skali (rosnące przychody ze skali produkcji) są związane z:

- istnieniem kosztów stałych (które rozkładają się na mniejszą lub większą produkcję)
- specjalizacją (wyższa wydajność pracy)
- niepodzielnością drogich, nowoczesnych, skomplikowanych maszyn ucieleśniających postęp techniczny (wyższa wydajność kapitału)

Niekorzyści skali (malejące przychody ze skali produkcji) są związane z:

- menedżerskimi niekorzyściami skali (trudności w zarządzaniu zbyt dużym przedsiębiorstwem, nadmierna biurokratyzacja)
- wyższymi kosztami transportu

Minimalna skala efektywna oznacza wielkość produkcji, przy której długookresowe przeciętne koszty całkowite osiągają wartość minimalną.

3. RODZAJE FUNKCJI PRODUKCJI

- **liniowa funkcja produkcji**
- **funkcja produkcji Cobba-Douglasa**
- **funkcja produkcji CES (Constant Elasticity of Substitution)**
  funkcja produkcji o stałej elastyczności substytucji
- **funkcja produkcji VES**
  funkcja produkcji o zmiennej elastyczności substytucji

Liniowa funkcja produkcji

$$Q = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n$$

$$Q = a_0 + a_1 K + a_2 L$$

Parametry liniowej funkcji produkcji a_i są interpretowane jako współczynniki krańcowej produktywności i-tego czynnika produkcji (np. kapitału, pracy).

Funkcja produkcji CES **(Arrow, Chedery, Minhas, Solow) oraz Brown**

$$Q = \gamma \left(\delta K^{-\rho} + (1-\delta) L^{-\rho} \right)^{-\frac{\upsilon}{\rho}},$$

γ - parametr efektywności procesu produkcyjnego

δ - współczynnik określający udział obu czynników: kapitału i pracy w produkcji $(0 < \delta < 1)$

ν - parametr efektów skali (miara stopnia jednorodności funkcji produkcji)

ρ - parametr substytucji

Współczynnik elastyczności substytucji σ jest stały i równy:

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}$$

Funkcja produkcji Cobba-Douglasa

$$Q = a\ K^{\alpha}\ L^{\beta}$$

Parametry funkcji produkcji Cobba-Douglasa α i β mają ważną interpretację ekonomiczną – są interpretowane jako współczynniki **elastyczności produkcji względem kapitału i pracy**.

Przeciętna produktywność kapitału:

$$AP_K = \frac{Q}{K} = \frac{a\ K^{\alpha}\ L^{\beta}}{K} = a\ K^{\alpha-1}\ L^{\beta}$$

Krańcowa produktywność kapitału:

$$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K} = \alpha\ a\ K^{\alpha-1}\ L^{\beta}$$

Elastyczność produkcji względem kapitału:

$$e_K = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial K}}{\frac{Q}{K}} = \frac{MP_K}{AP_K} = \alpha$$

Analogicznie można wykazać, że elastyczność produkcji względem pracy jest równa β:

$$e_L = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{Q}{L}} = \frac{MP_L}{AP_L} = \beta$$

Parametry α i β informują również o efektach skali produkcji:

- **stałe przychody skali gdy $\alpha + \beta = 1$**
- rosnące przychody skali gdy $\alpha + \beta > 1$
- malejące przychody skali gdy $\alpha + \beta < 1$

Uproszczona postać funkcji produkcji Cobba-Douglasa

$$Q = a\ K^{\alpha}\ L^{1-\alpha}$$

Funkcja produkcji typu Cobba-Douglasa – *n* - czynnikowa

$$Q = a\, X_1^{\alpha_1} \ldots X_i^{\alpha_i} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

Parametry α_1, α_2, …, α_i, …, α_n, oznaczają elastyczności produkcji względem czynników X_1 , X_2 , …, X_i , …, X_n .

Przeciętna produktywność *i*-tego czynnika:

$$P_i = \frac{Q}{X_i} = \frac{a\, X_1^{\alpha_1} \ldots X_i^{\alpha_i} \ldots X_n^{\alpha_n}}{X_i} = a\, X_1^{\alpha_1} \ldots X_i^{\alpha_i - 1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

Krańcowa produktywność *i*-tego czynnika:

$$MP_i = \frac{\partial Q}{\partial X_i} = \alpha\, a\, X_1^{\alpha_1} \ldots X_i^{\alpha_i - 1} \ldots X_n^{\alpha_n}$$

Elastyczność produkcji względem *i*-tego czynnika:

$$\frac{\dfrac{\partial Q}{Q}}{\dfrac{\partial X_i}{X_i}} = \frac{\dfrac{\partial Q}{\partial X_i}}{\dfrac{Q}{X_i}} = \frac{MP_i}{P_i} = \alpha_i$$

Parametry α_i informują również o efektach skali produkcji:

- stałe przychody skali gdy $\sum_i \alpha_i = 1$
- rosnące przychody skali gdy $\sum_i \alpha_i > 1$
- malejące przychody skali gdy $\sum_i \alpha_i < 1$

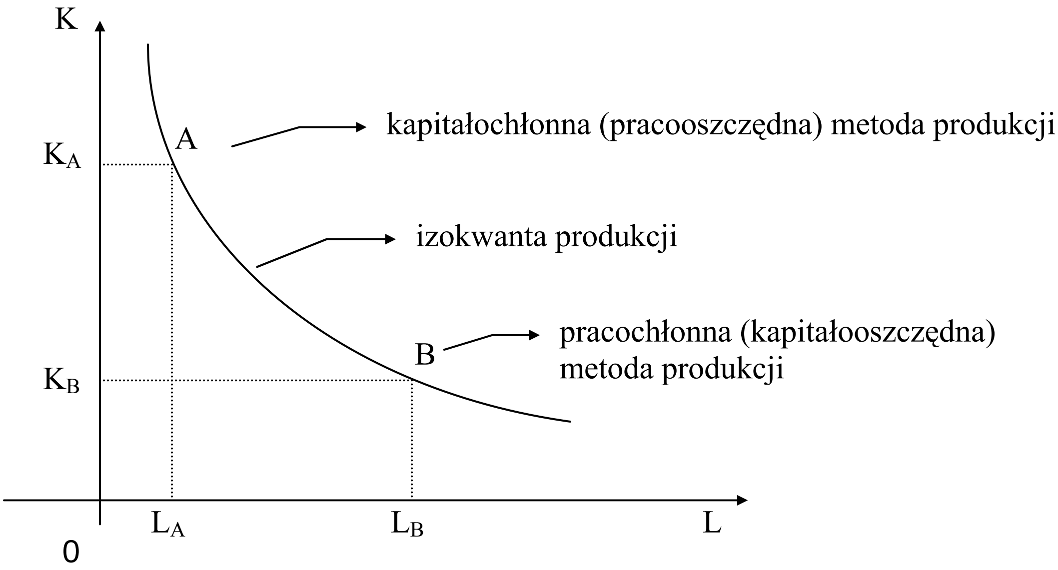
4. KRZYWA JEDNAKOWEGO PRODUKTU

Funkcja produkcji charakteryzuje zbiór technicznie efektywnych metod wytwarzania.

Metoda wytwarzania jest technicznie efektywna, gdy nie istnieją inne metody, które do wytworzenia tej samej wielkości produkcji zużywają przy danym nakładzie jednego czynnika - mniej drugiego.

Krzywa jednakowego produktu (izokwanta)

Izokwanta produkcji



Krańcowa stopa substytucji ($\frac{\Delta K}{\Delta L}$ dla stałego Q) informuje o ile można ograniczyć nakład kapitału przy wzroście nakładu pracy o jednostkę, aby produkcja pozostała na dotychczasowym poziomie.

Prawo malejącej krańcowej stopy substytucji:

W miarę zastępowania kapitału przez pracę, zmniejsza się ilość kapitału, którą można zastąpić przez każdą dodatkową jednostkę pracy.

Analogicznie, w miarę zastępowania pracy przez kapitał, zmniejsza się ilość pracy, którą można zastąpić przez każdą dodatkową jednostkę nakładu kapitału.

Innymi słowy, zwiększając nakłady jednego czynnika o kolejne jednostki oszczędzamy coraz mniej na drugim czynniku produkcji.

5. MINIMALIZACJA KOSZTÓW PRODUKCJI. WYBÓR NAJBARDZIEJ EFEKTYWNEJ TECHNIKI PRODUKCJI.

Z dostępnych technik produkcji wybieramy taką, która zapewnia najniższe koszty produkcji.

Linia jednakowego kosztu produkcji:

$p_K K + p_L L = TC$

p_K - koszt jednostkowy kapitału (cena kapitału)

p_L - koszt jednostkowy pracy (cena pracy)

TC - całkowity koszt produkcji

Po przekształceniu równania jednakowych kosztów uzyskujemy formułę:

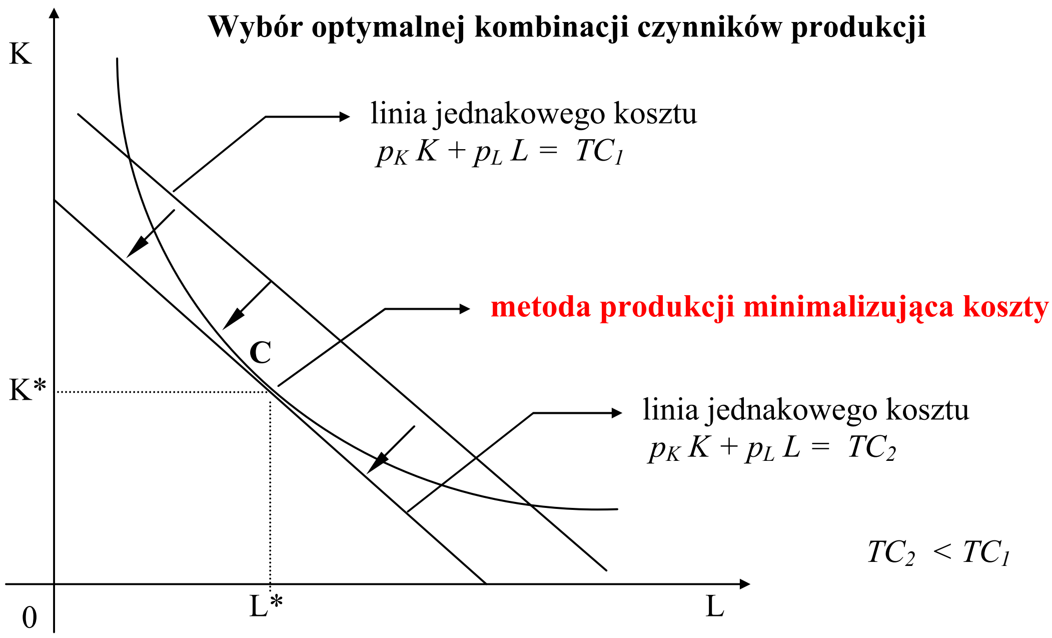
$$K = -\frac{p_L}{p_K} L + \frac{TC}{p_K}$$

która ułatwia interpretację graficzną położenia linii jednakowego kosztu.

Kat nachylenia linii zależy od relacji cen obu czynników produkcji.

Przy danych cenach pracy i kapitału wzrost (spadek) całkowitych kosztów produkcji TC oznacza przesunięcie linii w górę (w dół).

Wybór optymalnej kombinacji czynników produkcji



Irena Woroniecka
Wydział Informatycznych Technik Zarządzania
Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania

Reakcja producentów na zmiany cen czynników produkcji

(Jak reaguje popyt na czynniki produkcji na zmianę ich cen?)

- efekt substytucyjny
- efekt podażowy

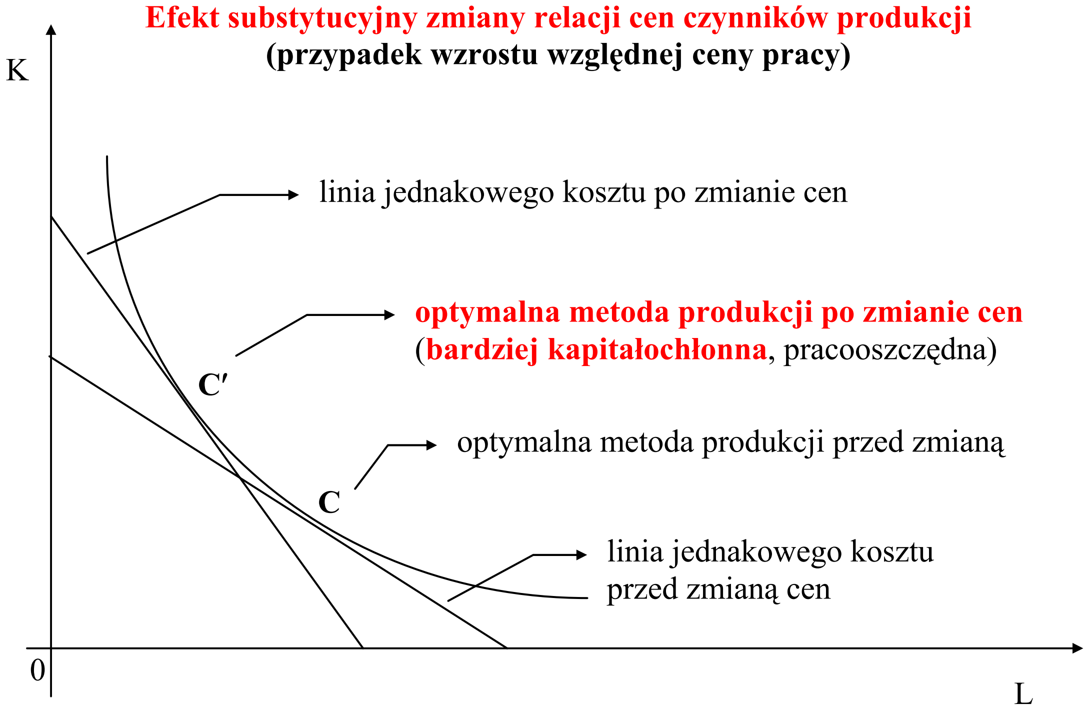
Efekt substytucyjny polega na zastępowaniu czynnika produkcji, którego cena relatywnie rośnie, innym czynnikiem produkcji, którego cena relatywnie maleje.

(substytucja między czynnikami produkcji - wywołana zmianą ich relacji cenowych)

Efekt podażowy jest związany ze zmianą wielkości produkcji/podaży w wyniku zmienionych kosztów wytwarzania i dostosowaniem zapotrzebowania na czynniki produkcji (pracę, kapitał) do zmienionych rozmiarów produkcji.

Rozważmy reakcje producenta na wzrost ceny pracy (na wzrost płacy):

- **efekt substytucyjny** - substytucja czynnika, który podrożał przez czynnik, który stał się relatywnie tańszy, a więc zastąpienie nakładów pracy nakładami kapitału. Producenci zwracają się w kierunku technik produkcji bardziej kapitałochłonnych (procooszczędnych).
- **efekt podażowy** - spadek produkcji (podaży) wywołany wzrostem kosztów wytwarzania i odpowiednie zmniejszenie zapotrzebowania na czynniki produkcji. Wzrost kosztów pracy oznacza wzrost kosztów marginalnych i (przy niezmienionym poziomie utargu krańcowego) skłania producentów do ograniczenia rozmiarów produkcji.



Tangens kąta nachylenia krzywej jednakowego produktu w punkcie odpowiada krańcowej stopie substytucji, czyli relacji krańcowych produktywności pracy i kapitału:

$$\frac{\partial K}{\partial L} = -\frac{MP_L}{MP_K} \qquad \text{dla stałego poziomu } Q$$

Tangens kąta nachylenia linii jednakowego kosztu odpowiada relacji jednostkowych kosztów czynników produkcji: pracy i kapitału: $-\frac{p_L}{p_K}$

W punkcie optymalnym (punkcie styczności linii kosztu do krzywej jednakowego produktu) kąt nachylenia krzywej izokwanty i linii kosztu są równe:

$$-\frac{MP_L}{MP_K} = -\frac{p_L}{p_K} \qquad \text{(przyrównujemy tangensy katów)}$$

Stąd **warunek optymalnej kombinacji czynników** produkcji, zapewniającej najniższe koszty produkcji:

$$\frac{MP_K}{p_K} = \frac{MP_L}{p_L}$$ Dla optymalnej techniki relacje krańcowych produktywności do jednostkowych kosztów są równe dla obu czynników: kapitału i pracy.

Warunek optymalnej techniki produkcji można również uzyskać wykorzystując metodę mnożników Lagrange'a:

Zadanie optymalizacji:

$$\begin{cases} p_K\, K + p_L\, L \ \to\ \min \\ Q(K, L) \ \geq\ Q_0 \end{cases}$$

Funkcja Lagrange'a:

$$LF = -\, p_K\, K - p_L\, L \ + \ (\ Q(K, L) - Q_0\ )\, u$$

u - mnożnik Lagrange'a

Przyrównujemy cząstkowe pochodne funkcji Lagrange'a do zera:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial LF}{\partial K} \ = \ -\, p_K \ + \ \dfrac{\partial Q}{\partial K}\, u \ = \ 0 \\[2ex] \dfrac{\partial LF}{\partial L} \ = \ -\, p_L \ + \ \dfrac{\partial Q}{\partial L}\, u \ = \ 0 \\[2ex] \dfrac{\partial LF}{\partial \alpha} \ = \ Q_0 - Q\,(K, L) \ = \ 0 \end{cases}$$

Wykorzystując definicje krańcowych produkcyjności czynników otrzymujemy:

$$\begin{cases} p_K \ = \ MP_K\, u \\ p_L \ = \ MP_L\, u \\ Q\,(K, L) \ = \ Q_0 \end{cases}$$

Po podzieleniu stronami i przekształceniu otrzymujemy znany już warunek:

$$\frac{MP_K}{p_K} \ = \ \frac{MP_L}{p_L}$$